Schnittwinkel - Lösungen

1. Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ist der spitze Winkel zwischen den RV:

$cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{6}} \Leftrightarrow cos\alpha = \frac{-7}{2\sqrt{51}} \Leftrightarrow \alpha = cos^{-1}(\frac{-7}{2\sqrt{51}})$ (mit shift zu berechnen) $\alpha = 119{,}3°$ daraus ergibt sich für den Schnittwinkel: $\alpha' = 60{,}7°$

2. Beim Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene berechnet man erst den Winkel β zwischen Normalenvektor der Ebene und der Geraden:

$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$ daraus ergibt sich:

$cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}-2\\5\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\5\\-2\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow cos\beta = \frac{7}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{49}} \Leftrightarrow \beta \approx 82{,}22°$

Somit ist der Winkel zwischen der Geraden und der Ebene $\alpha = 90° - 82{,}22° = 7{,}78°$

3. Aufstellen der Ebenengleichung:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\-8\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\24\end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

=> E: $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}\right) = 0$ Koordinatendarstellung: $-x_1 + x_2 + 4x_3 + 3 = 0$

D in E einsetzen: $-(-3) - 2 + 4(-1) + 3 = 0$ <=> $0 = 0$ damit liegt D in E.

b) Zunächst Winkel β zischen Seitenkante und Normalenvektor der Ebene berechnen:

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}$ $cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow cos\beta = \frac{22}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{42}}$ =>$\Leftrightarrow \beta \approx 36{,}86°$ so gilt

$\alpha = 53{,}14°$

c) Berechnung des Normalenvektors $\vec{m}$ der Ebene, die die Seitenfläche ADS beschreibt:

$\vec{m} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}-5\\3\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix} = 22 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Winkel zwischen den beiden Ebenen ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren

$cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right|}$ $cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}}$ => $\alpha \approx 123°$ d.h. der gesuchte Winkel ist $\alpha' = 57°$

4. a) Situation Winkel zwischen Gerade und Ebene, d.h. zunächst Winkel β zwischen Normalenvektor der Ebene und dem RV der Geraden bestimmen:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,5 \end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow \; cos\beta = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13,25}}$ => $\beta \approx 7,9°$ damit gilt für den Winkel zwischen Balken und Kletternetz: $\alpha = 82,1°$

Schnittpunktberechnung: Gerade in Ebene einsetzen:

$2(-1 + 2\mu) + 3(2 - 3\mu) - 10 = 0$

$-2 + 4\mu + 6 - 9\mu - 10 = 0$

$-5\mu - 6 = 0$ => $\mu = -\frac{6}{5}$ in Gerade einsetzen: $S(-3,4;\ -1,6; 7,76)$

Neigungswinkel des Balkens bedeutet Winkel zwischen Balken und waagrechter Ebene:

Winkel zwischen RV und waagrechter Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,5 \end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow \; cos\beta = \frac{0,5}{\sqrt{13,04}}$ => $\beta \approx 82°$ => $\alpha \approx 8°$

b) Aufstellen der Ebene F, die durch Balken und Stahlseil beschrieben wird:

Da das Seil 3m in x_3 -Richtung verschoben ist gilt für den Punkt P auf dem Seil $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$. $\vec{A}$ sei der Aufpunkt des Balkens. Somit gilt für den Normalenvektor von F:

$\vec{m} = \overrightarrow{AP} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen zwei Ebenen ist der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren:

$cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \; \Leftrightarrow \; cos\alpha = \frac{0}{13} \; \Leftrightarrow \; cos\alpha = 0 \; \Leftrightarrow \; \alpha = 90°$