Flächenberechnungen mit Integralen – Lösung

1. Berechne den Flächeninhalt, den die Funktion mit der x-Achse einschließt!

   a) $f(x) = (x+3)(x-3)$, also Nullstellen: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

   $\int_{-3}^{3}(x^2-9)dx = 2 \cdot \int_{0}^{3}(x^2-9)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - 9x\right]_0^3 = -36 \rightarrow \boldsymbol{A = 36}$

   b) $f(x) = x(x^2-3x+2) = x \cdot (x-1)(x-2)$, also Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2$

   $A = \left|\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx\right| + \left|\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx\right| =$

   $= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{0{,}5}$

2. Berechne den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse über dem angegebenen Intervall!

   a) Nullstellen auf dem Intervall: e-Fkt hat keine, also nur bei: $x = 0$

   $A = \left|\int_{-1}^{0}\left(2x \cdot e^{x^2-4}\right)dx\right| + \left|\int_0^2\left(2x \cdot e^{x^2-4}\right)dx\right| =$

   $= \left|\left[e^{x^2-4}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[e^{x^2-4}\right]_0^2\right| = \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^4} + 1 = \boldsymbol{1 - \frac{1}{e^3}}$

   b) $f(x) = 0$ setzen: $\sqrt{x} - x = 0 \ \rightarrow\ \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) = 0$, also Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

   $A = \left|\int_0^1\left(\sqrt{x} - x\right)dx\right| + \left|\int_1^3\left(\sqrt{x} - x\right)dx\right| =$

   $= \left|\left[\frac{2}{3}x^{1,5} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{2}{3}x^{1,5} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3\right| = \boldsymbol{\frac{1}{6} + \frac{6\sqrt{3}-14}{3}}$

3. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

   a) Funktionen gleichsetzen um Schnittpunkte zu bestimmen:

   $x^2 - 2x = 4x - 5 \ \rightarrow\ x^2 - 6x + 5 = 0 \ \rightarrow$ Schnittpunkte: $x_1 = 1,\ x_2 = 5$

   $A = \left|\int_0^5(x^2-6x+5)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_0^5\right| = \left|-\frac{25}{3}\right| = \boldsymbol{\frac{25}{3}}$

   b) Funktionen gleichsetzen um Schnittpunkte zu bestimmen:

   $x^3 - 1 = x^2 + 2x - 1 \ \rightarrow\ x^3 - x^2 - 2x = 0 \ \rightarrow\ x(x^2 - x - 2) = 0$

   Schnittpunkte: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$

   $A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)dx\right| + \left|\int_0^2(x^3 - x^2 - 2x)dx\right| =$

   $= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2\right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{37}{12}}$

4. Bestimme den Flächeninhalt zwischen den Graphen der beiden Funktionen über dem angegebenen Intervall!

   a) Untersuchen auf Schnittpunkte:

   $2 - 0{,}5x^2 = 2x - 4 \quad \rightarrow \quad 0{,}5x^2 + 2x - 6 = 0$ Schnittpunkte: $x_1 = -6,\ x_2 = 2$

   $A = \left|\int_1^2 (0{,}5x^2 + 2x - 6)dx\right| + \left|\int_2^4 (0{,}5x^2 + 2x - 6)dx\right| =$

   $= \left|\left[\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 6x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 6x\right]_2^4\right| = \left|-\frac{11}{6}\right| + \frac{28}{3} = \frac{67}{6}$

   b) Untersuchen auf Schnittpunkte:

   $\ln x - 1 = e - x \quad \rightarrow$ Schnittpunkte: $x = e$

   $A = \left|\int_1^e (\ln x + x - 1 - e)dx\right| =$

   $= \left|\left[x\ln x - x + \frac{1}{2}x^2 - x - ex\right]_1^e\right| = \left|\left[x\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x - ex\right]_1^e\right| = \left|\frac{-e^2+3}{2}\right| = \frac{e^2-3}{2}$

   c) Untersuchen auf Schnittpunkte:

   $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1 = x + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0$ Schnittpunkte: $x_{1,2} = 0,\ x_2 = 6$

   $A = \left|\int_{-6}^0 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx\right| + \left|\int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx\right| =$

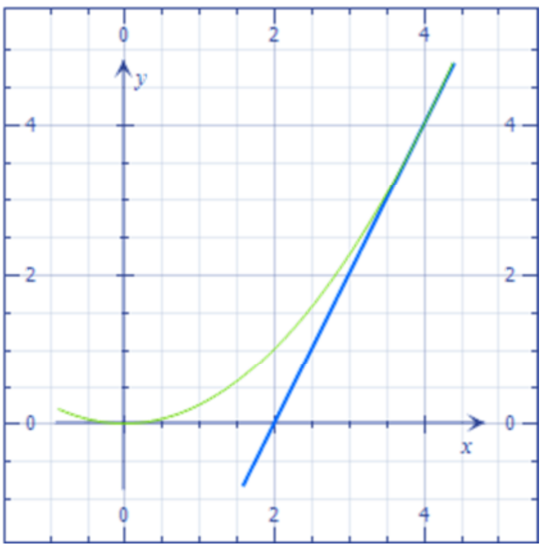
   $= \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right]_{-6}^0\right| + \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right]_0^6\right| = |-189| + |-27| = \mathbf{216}$

5. Bestimmen der Tangentengleichung: $g'(x) = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad m = g'(4) = 2$

   $y = mx + t,$ Einsetzen von m und P: $4 = 2 \cdot 4 + t \quad \rightarrow \quad t = -4$

   Tangentengleichung: $y_T = 2x - 4$

   Skizze:



   $A = \left|\int_0^4 g(x)dx\right| - \left|\int_2^4 (2x - 4)dx\right| = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$