Grundwissen zur Stochastik Q12/13

1. Kombinatorik – Anzahl Möglichkeiten k-faches Ziehen aus Urne mit n Kugeln

- Ziehen mit Reihenfolge, mit Zurücklegen: n^k (k-Tupel, Zahlenschloss, k mal n Möglichkeiten)
- Ziehen mit R., ohne Z.: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (n Personen, k davon für Foto)
- Ziehen ohne R., ohne Z.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Kombinationen, Lottozahlen, immer wenn Formulierung „k aus n auswählen" passt)
- $\binom{n}{k}$: im Zähler k Faktoren von n abwärts, im Nenner k Faktoren von 1 aufwärts: $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$
- Nur schwarz/weiß, Ziehen von n Kugeln mit einem Griff: $P(X = s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$ (Hypergeom. Vert.)

2. Zufallsgröße

- Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reele Zahl $X(\omega)$ zuordnet
- Wahrscheinlichkeitsverteilung: ordnet jedem Wert x_i einer Zufallsgröße eine Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zu
- Kumulative Verteilungsfkt.: ordnet jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zu
- Kenngrößen
  - Erwartungswert: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ (quasi der Mittelwert)
  - Varianz: $\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
  - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
- Binomialverteilt nach $B(n,p)$, wenn Bernoullikette der Länge n mit Parameter p
- Fair bedeutet: Erwartungswert des Gewinns = 0

3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen veranschaulichen

- Säulendiagramm: Höhe der Säulen = Wahrscheinlichkeit
- Histogramm: Fläche der Säulen = Wahrscheinlichkeit
- Histogramm mit Rechtecksbreite 1 bedeutet wieder: Höhe = Wahrscheinlichkeit

4. Bernouillexperiment, Bernoullikette

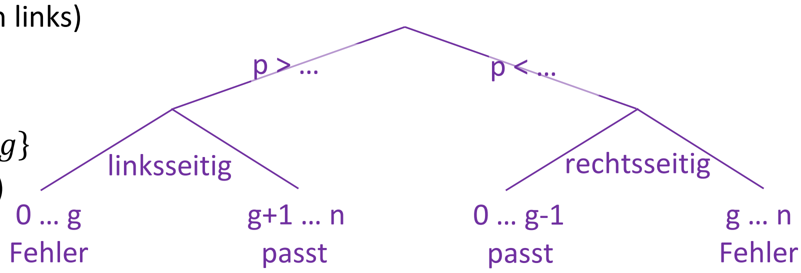
- BE ist ein ZE mit genau zwei Ergebnissen: $P(Treffer) = p$, $P(Niete) = 1 - p = q$
- Bernoullikette: n unabhängige Durchführungen eines BE
  - Zugehörige Zufallsgröße ist binomial verteilt nach $B(n,p)$
  - $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$
  - $F_p^n(x) = P_p^n(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} B(n;p;i)$
- Kenngrößen
  - Erwartungswert: $\mu = E(X) = np$
  - Varianz: $\sigma^2 = Var(X) = npq$
  - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq}$
- 3x-mind: $P(mind.\,1) \geq 95\% \rightarrow P(kein) \leq 5\% \rightarrow p^n \leq 0{,}05 \rightarrow n \cdot \ln p \leq \ln 0{,}05 \rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln p}$

5. Axiome von Kolmogorow

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung muss gelten
  - $\mathrm{P(A)} \geq 0$
  - $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
  - Wenn $A \cap B = \{\ \}$ ist, dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Testen von Hypothesen

- Nullhypothese H_0 und Gegenhypothese H_1
- Kritischer Bereich K (Ablehnungsbereich), nichtkritischer Bereich $\overline{K}$
- Linksseitiger Test (weil Ablehnungsbereich links)
    - $H_0\colon\ p \geq p_0$
    - $H_1\colon\ p < p_0$
    - Ablehnungsbereich: $K = \{0; 1; \dots; g\}$
- Rechtsseitiger Test (Ablehnbereich rechts)
    - $H_0\colon\ p \leq p_0$
    - $H_1\colon\ p > p_0$
    - Ablehnungsbereich: $K = \{g; g+1; \dots; n\}$



- Fehler 1.Art: Nullhypothese ablehnen, obwohl richtig, also irrtümlicherweise verwerfen
- Fehler 2.Art: Nullhypothese annehmen, obwohl falsch, also irrtümlicherweise annehmen

7. Stetige Zufallsgröße

- Dichtefunktion zur Darstellung einer stetigen Zufallsgröße
    - (1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
    - (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
- Kenngrößen
    - Erwartungswert: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$
    - Varianz: $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$
    - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

8. Gauß'sche Glockenkurve

- $\varphi_{\mu,\sigma}\colon x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mit $x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R}^+$.
    - Hochpunkt $H\left(\mu \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
    - Wendepunkte $W_{1,2}\left(\mu \pm \sigma \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$
    - Punktsymmetrisch zu $P(\mu|0{,}5)$
    - Integralfunktion $\Phi_{\mu,\sigma} = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$
- graphisches/rechnerisches Bestimmen
    - $\mu = H_x$ aus dem Graphen ablesen
    - $\mu \pm \sigma$ ist dort, wo $\varphi_{\mu,\sigma}(\mathrm{x}) \approx 0{,}6 \cdot H_y$
    - $\sigma = \frac{1}{H_y \cdot \sqrt{2\pi}}$

9. Normalverteilung

- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$
- Standardnormalverteilung: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$
- Sigmaregeln:
    - Ein-Sigma: 0,683 // Zwei-Sigma: 0,954 // Drei-Sigma: 0,997
    - 0,900: 1,64-Sigma // 0,950: 1,96-Sigma // 0,99: 2,58-Sigma