Grundwissen zur Analytischen Geometrie Q12/13

1. Allgemeines

- Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- Ortsvektor ist Vektor vom Ursprung zum Punkt: $\overrightarrow{OP}$
- geschlossene Vektorkette: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, Gegenvektor $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- Linearkombination: $r_1\overrightarrow{a_1} + r_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + r_n\overrightarrow{a_n}$
- Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$, normierter Vektor $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ → Länge 1

2. Skalarprodukt, Schnittwinkel

- $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ im $\mathbb{R}^2$
- es gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Winkel zw. Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- Winkel zwischen Geraden: spitzer Winkel zwischen den RVs: $\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- Winkel zwischen Ebenen: spitzer Winkel zwischen den NVs der Ebenen
- Winkel zwischen Gerade und Ebene: spitzer Winkel zwischen RV und NV, dann 90° – Ergebnis

3. Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$, steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind parallel
- Flächeninhalt Parallelogramm: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, Dreieck: $A_D = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$
- Volumen Spat: $V_S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$, dreiseitige Pyramide: $V_P = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$, vierseitige: $V_P = \frac{1}{3}$ ...

4. Kreise und Kugeln

- Kreis bzw. Kugel in Vektorform: $r^2 = (\vec{x} - \vec{M})^2$
- Kreis in Koordinatenform: $r^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2$
- Kugel in Koordinatenform: $r^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2$

5. Vektoren

- drei Vektoren lin.unabh: paarweise lin.unabh. + einer nicht durch die anderen darstellbar **oder** Spatprodukt $\neq 0$

6. Gerade / Gerade-Gerade

- $g||h$: (1) RVs lin.abh. (2) Punktprobe negativ **oder** Diff.Vektor APs + RV lin.unabh.
- g, h identisch: (1) RVs lin.abh. (2) Punktprobe positiv **oder** $AP_g - AP_h$ + RV lin.abh.
- g, h schneiden sich: (1) RVs lin. unabh.
  (2) $g = h$ setzen ergibt SP **oder** Spatprodukt $(RV_g, RV_h, AP_g - AP_h) = 0$
- g, h windschief: RVs lin.unabh. und Geraden gleichsetzen ergibt keine Lösung
  oder Spatprodukt $(RV_g, RV_h, AP_g - AP_h) \neq 0$

7. Ebene

- <u>Parameterform → KF / NF:</u> Kreuzprodukt der RVs ergibt NV, dessen Werte als Koeffizienten nehmen: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$, Aufpunkt einsetzen um c zu bestimmen
- <u>KF / NF → Parameterform:</u> drei Pkte. berechnen (je zwei Koordinaten 0, dritte berechnen), dann Ebene aus drei Punkten aufstellen

8. Gerade - Ebene

- Gerade schneidet Ebene: (PF) $g = E$ setzen (KF) g in E einsetzen → SP
- Gerade senkrecht Ebene: $RV_g || NV_E$ **oder** $RV_g \circ RV_{E1} = RV_g \circ RV_{E2} = 0$
- Gerade parallel Ebene: $g = E$ setzen ergibt keinen SP **oder** $RV_g \circ NV_E = 0$, AP von $g \notin E$
- Gerade liegt in Ebene: $g = E$ setzen ergibt unendlich viele SPs

9. Ebene - Ebene

- parallel wenn: (2*KF) NVs l.a. (KP+PF) $NV \circ RV_{E1} = NV \circ RV_{E2} = 0$
- wenn parallel dann identisch, wenn: (2*KF) eine Gleichung Vielfaches der anderen
  (KF+PF) Punktprobe mit AP positiv
- sonst Schnittgerade:
  - (PF+KF) PF in KF, nach einem Parameter auflösen, diesen in PF + zusammenfassen
  - (2*KF) RV der Geraden durch $NV_E \times NV_F$, für AP Ebenen so addieren, dass eine Koordinate wegfällt, zweite festlegen, damit dritte berechnen, dann mit beiden die erste berechnen

10. Abstände

- Abstand zweier Punkte P, Q: Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ bestimmen
- Punkt-Gerade: RV der Geraden als NV einer Ebene die P enthält, SP von g und E, Abstand von SP und P bestimmen.
- Zweier paralleler Gerade: siehe Abstand Punkt-Gerade für bel. Punkt
- Punkt-Ebene: Abstand von P zum Fußpunkt des Lots von P auf E **oder** Abstandsformel
- Gerade-Ebene: Abstand des AP der Geraden von der Ebene also Abstandsformel
- Ebene-Ebene: Abstand eines Punktes der einen Ebene von der anderen also Abstandsformel
- Windschiefe Geraden: Kreuzprodukt der RVs als NV einer Ebene, die eine der Geraden enthält (AP einsetzen), dann Abstand des AP der anderen Geraden von der Ebene also Abstandsformel
- Abstandsformel: $d(P,E) = \frac{|\vec{n} \circ \overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|}$ mit $A \in E$ **oder** $d(P,E) = \frac{|\vec{n} \circ \overrightarrow{OP} + k|}{|\vec{n}|} = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$

11. Zeichnen, Lotgeraden, Spiegeln

- Gerade zeichnen: Spurpunkte zeichnen, dazu je eine Koordinate 0 setzen
- Senkrechte Projektion einer Geraden in eine Koordinatenebene: verbleibende Koordinate 0 setzen
- Ebene zeichnen: Spurgeraden zeichnen, dazu je zwei Koordinaten 0 setzen
- P an E spiegeln: Gerade mit P als AP und NV der Ebene als RV, g mit E schneiden, mit Parameter Lotfußpunkt F bestimmen, $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$
- P an g spiegeln: Ebene mit RV von g als NV und $P \in E$, E mit g schneiden ergibt Lotfußpunkt, wieder $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$
- Gemeinsame Lotgerade von g, h: RV_l durch $RV_g \times RV_h$, Ebene aus RV_l und einer der Geraden in KF bringen, SP von anderer Gerade mit Ebene ergibt AP der Lotgeraden