

Grundwissen zur Analysis Q12/13

1. Untersuchung von $f(x)$

- $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners / Radikand negativ / Logarithmus-Argument} \leq 0\}$
- Symmetrie
 - Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$ (bei ganzrat. Fkt. nur ungerade Exp.)
 - Achsensymmetrie zur y -Achse: $f(x) = f(-x)$ (bei ganzrat. Fkt. nur gerade Exp.)
 - Gebrochen rationale Fkt.: $\frac{AS}{AS} = AS$, $\frac{PS}{PS} = AS$, $\frac{AS}{PS} = PS$, $\frac{PS}{AS} = PS$
- Verhalten am Rand von D : $\lim_{x \rightarrow \pm x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$, große Werte einsetzen, DENKEN
- Schnittpunkt mit der y -Achse: $P(0|f(0))$
- Schnittpunkte mit der x -Achse bzw. Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow N_1(x_1|0)$ bzw. $x_1 = 0$
 - gerade Vfh, kein VZW \Rightarrow Berührungspunkt
 - ungerade Vfh, VZW \Rightarrow Schnittpunkt
 - Zweiter Grad: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Lösungsformel / Vieta wenn $a = 1$
 - Höherer Grad: Erkennen: $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1$
 Probieren, Pol.div: $(x^3 - 4x^2 + 8x - 5): (x - 1) = x^2 - 3x + 5$

2. Gebrochen rationale Funktionen:

- Definitionslücken bei Nullstellen des Nennerpolynoms
 - Falls gleichzeitig Nullst. des Zählers mit mind. gleichem Grad, dann hebbar \rightarrow „Loch“
 - sonst Polstelle und senkrechte Asymptote (gerade Vfh ohne VZW, ungerade mit VZW)
- Verhalten im Unendlichen - Asymptoten bei Zählergrad z und Nennergrad n :
 - $z < n$: $y = 0$, also x -Achse als waagerechte Asymptote
 - $z = n$: $y = \frac{a_n}{b_n}$, waagerechte A. (Quotient der Koeffizienten der höchsten x -Potenzen)
 - $z = n + 1$: $y = mx + t$ als schräge Asymptote (ermitteln durch Polynomdivision)

3. Ableitungsregeln:

- $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$ $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$ $[f(x) + a]' = f'(x)$ $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$ $[\cos(x)]' = -\sin(x)$ $[e^x]' = e^x$ $[e^{ax}]' = ae^{ax}$ $[a^x]' = \ln a \cdot a^x$
- Produktregel: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $\frac{N aZ - Z aN}{N^2}$
- Kettenregel: $[f(xg(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4. Untersuchung von $f'(x)$

- Steigung der Tangente/der Funktion in x_0 : $m = f'(x_0)$, mit $\tan \alpha = m$
- Punkte mit waagerechter Tangente: x -Koordinaten aus den Lösungen von $f'(x) = 0$
- Monotonieverhalten:
 - $f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist sms $f'(x) < 0 \Rightarrow G_f$ ist smf
 - Änderung des Verhaltens von zunehmend auf abnehmend: HOP
 - Änderung des Verhaltens von abnehmend auf zunehmend: TIP
 - kein VZW von $f'(x) \rightarrow$ kein Extremum sondern TeP

5. Untersuchung von $f''(x)$

- Extremstelle bei x_0 , wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
 - Lokales Minimum, wenn Wechsel smf \rightarrow sms oder $f''(x) > 0$, $E(x_0|f(x_0)) \odot$
 - Lokales Maximum, wenn Wechsel sms \rightarrow smf oder $f''(x) < 0$, $E(x_0|f(x_0)) \otimes$

- Krümmungsverhalten: $f''(x) > 0 \rightarrow$ linksgekrümmt ☺
 $f''(x) < 0 \rightarrow$ rechtsgekrümmt ☹
- Wendepunkt (relativ zur Umgebung steilster/flachster Verlauf) bei $P(x_0|f(x_0))$ wenn:
 - o $f''(x_0) = 0$
 - o VZW bei $f''(x_0)$ oder $f'''(x_0) \neq 0$
 - o Zusätzlich TeP – also WP mit waagerechter Tangente – wenn $f'(x_0) = 0$

6. Weitere Formeln:

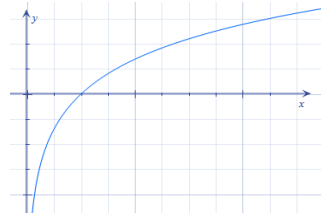
- Allgemeine Form der Tangente: $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
- Allgemeiner Schnittwinkel zweier Graphen: $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$
- Zwei Graphen senkrecht aufeinander: $m_1 \cdot m_2 = -1$ speziell $m_T \cdot m_N = -1$
- Scheitelform der Parabel: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ Scheitelkoord.: $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$

7. Allgemeines zu Stammfunktion, Integralfunktion etc.

- $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$
- Eine Integralfunktion ist eine Stammfunktion mit einer Nullstelle
- $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ ist diejenige Stammfunktion mit $F(a) = 0$ und somit eine Integralfunktion
- Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

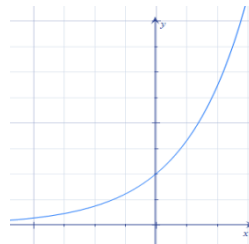
8. Die Logarithmusfunktion

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$



9. Die Exponentialfunktion

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ $e^0 = 1$
- $\int a \cdot e^{bx} dx = \frac{a}{b} e^{bx} + C$
- $a^x = e^{x \cdot \ln a}$
- $\int e^x dx = e^x + C$



10. Flächenberechnungen

- Fläche $A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, mit $F(x)$ bel. Stammfkt. von $f(x)$
- Fläche von G_f und den Koordinatenachsen eingeschlossen: $A = \int_0^{x_0} f(x) dx$ mit x_0 als vorher zu bestimmende Nullstelle
- Fläche von G_f und der x -Achse eingeschlossen: $A = A_1 + A_2$ mit x_1, x_2, x_3 Nullstellen von f . $A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ und $A_2 = \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right|$
- Fläche von G_f und G_g eingeschlossen: $A = \left| \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx \right|$ mit x_1, x_2 als Schnittstellen von f und g (Funktionen gleichsetzen), $h(x)$ Differenzfkt.

