

# Übungsblatt Dichtefunktion - Lösungen

## Aufgabe 1: Dichtefunktionen

### a) Nachweis der Dichtefunktion

1. Bedingung:  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [1; 3]$ .

$$f(1) = 0 \quad (\text{Nullstelle bei } x = 0.75)$$

$$m = 0.4 \quad (\text{Steigung positiv, also } f(x) \geq 0)$$

2. Bedingung: Berechnung des Integrals:

$$\int_1^3 f(x) dx = [0.2x^2 - 0.3x]_1^3 = 1$$

Also ist  $f(x)$  eine Dichtefunktion.

### b) Wahrscheinlichkeiten

- $P(X = 2) = 0$  (für stetige Zufallsgrößen ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Punkt zu treffen, immer 0).
- $P(X > 5) = 0$  (da die Dichtefunktion nur für  $x \in [1; 3]$  definiert ist).

### c) Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \leq 2) = 30\%$$

$$P(1.5 < X \leq 3) = \int_{1.5}^3 f(x) dx = 90\%$$

### d) Interpretation

Das Ergebnis  $P(1.5 < X \leq 2) = 0.2$  bedeutet, dass  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% einen Wert zwischen 1.5 und 2 annimmt.

---

## Aufgabe 2: Überprüfung von Dichtefunktionen

a)  $f(x) = 0.2$  für  $x \in [0; 5]$

1.  $f(x) \geq 0$  im Intervall. 2. Integral:

$$\int_0^5 0.2 \, dx = 0.2 \cdot (5 - 0) = 1 \quad (\text{also Dichtefunktion})$$

b)  $f(x) = 0.1x$  für  $x \in [0; 10]$

1.  $f(x) \geq 0$  im Intervall. 2. Integral:

$$\int_0^{10} 0.1x \, dx = 0.1 \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 0.1 \cdot 50 = 5 \quad (\text{keine Dichtefunktion})$$

c)  $f(x) = 0.2x - 0.3$  für  $x \in [0; 1.5]$

$f(x) < 0$  für  $x < 1.5$ , also keine Dichtefunktion

.

## Aufgabe 3: Bestimmung von Parametern

a)  $f(x) = a$  für  $x \in [0; 8]$

$$\int_0^8 a \, dx = 8a = 1 \implies a = \frac{1}{8}$$

b)  $f(x) = mx - 2$  für  $x \in [2; 6]$

$$\begin{aligned} \int_2^6 (mx - 2) \, dx &= \left[ \frac{mx^2}{2} - 2x \right]_2^6 = (18m - 12) - (2m - 4) = 16m - 8 = 1 \\ \implies 16m &= 9 \implies m = \frac{9}{16} = 0.5625 \end{aligned}$$

## Aufgabe 4: Dichtefunktion finden

Für  $f(x) = ax - 1$  mit  $1 \leq x \leq 4$ :

$$\begin{aligned} \int_1^4 (ax - 1) \, dx &= \left[ \frac{ax^2}{2} - x \right]_1^4 = (8a - 4) - \left( \frac{a}{2} - 1 \right) = 8a - 4 - \frac{a}{2} + 1 = 0 \\ \implies 8a - \frac{a}{2} - 3 &= 0 \implies \frac{15a}{2} = 3 \implies a = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

---

## Aufgabe 5: Sinus-Dichtefunktion

Für  $f(x) = a \cdot \sin(x)$  auf  $[0; \pi]$ :

$$\int_0^\pi a \sin(x) dx = a [-\cos(x)]_0^\pi = a(1 - (-1)) = 2a = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

## Aufgabe 6: Quadratische Dichtefunktion

a)  $f(x) = a \cdot x^2$  für  $x \in [0; 4]$

$$\int_0^4 ax^2 dx = a \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = a \cdot \frac{64}{3} = 1 \implies a = \frac{3}{64}$$

b)  $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{3}{64} x^2 dx = \frac{3}{64} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3}{64} \cdot 9 = \frac{27}{64}$$

## Aufgabe 7: Integration über Dichtefunktionen

a)  $f(x) = 0.5x$  für  $x \in [0; 2]$

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 0.5x dx = [0.25x^2]_0^1 = 0.25$$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 0.5x dx = [0.25x^2]_1^2 = 0.25(4) - 0.25(1) = 1 - 0.25 = 0.75$$

b)  $f(x) = 0.3$  für  $x \in [2; 5]$

$$P(2 < X < 3) = \frac{1}{3}$$

$$P(3 < X < 5) = \frac{2}{3}$$

c)  $f(x) = 0.45 - 0.1x$  für  $x \in [0; 4]$

$$P(1 < X < 3) = 0.5$$

$$P(0 < X < 4) = 1$$