Zusammenfassung zur ANALYTISCHEN GEOMETRIE

1. Allgemeines

- Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$
- Ortsvektor ist Vektor vom Ursprung zum Punkt: $\overrightarrow{OP}$
- geschlossene Vektorkette: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, Gegenvektor $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- Linearkombination: $r_1\overrightarrow{a_1} + r_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + r_n\overrightarrow{a_n}$
- Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$, normierter Vektor $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ → Länge 1

2. Skalarprodukt, Schnittwinkel

- $\vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ im R^3 bzw. $\vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ im R^2
- es gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\circ\vec{b} = 0$
- Winkel zw. Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ mit $\varphi < 90° \Leftrightarrow SP > 0$, $90° < \varphi < 180° \Leftrightarrow SP < 0$
- Winkel zwischen Geraden: spitzer Winkel zwischen den RVs: $\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\circ\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$
- Winkel zwischen Ebenen: spitzer Winkel zwischen den NVs der Ebenen
- Winkel zwischen Gerade und Ebene: spitzer Winkel zwischen RV und NV, dann 90° – Ergebnis

3. Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$, steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind parallel
- Flächeninhalt Parallelogramm: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, Dreieck: $A_D = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$
- Volumen des Spats: $V_S = |(\vec{a} \times \vec{b})\circ\vec{c}|$, der dreiseitigen Pyramide: $V_P = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b})\circ\vec{c}|$

4. Kreise und Kugeln

- Kreis bzw. Kugel in Vektorform: $r^2 = (\vec{X} - \vec{M})^2$
- Kreis in Koordinatenform: $r^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2$
- Kugel in Koordinatenform: $r^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2$

5. Vektoren

- Drei Vektoren linear unabhängig: paarweise unabhängig + einer nicht durch die anderen darstellbar

  oder Spatprodukt ungleich 0

6. Gerade / Gerade-Gerade

- $g||h$: (1) RVs linear abhängig (2) Punktprobe negativ **oder** Diff.Vektor APs lin.unabh. von RV
- g, h identisch: (1) RVs linear abhängig (2) Punktprobe positiv **oder** $AP_g - AP_h$ lin.abh. von RV

- g, h schneiden sich: (1) RVs linear unabhängig
  (2) $g = h$ setzen ergibt SP **oder** Spatprodukt $\left(RV_g, RV_h, AP_g - AP_h\right) = 0$
- g, h windschief: RVs linear unabhängig und Geraden gleichsetzen ergibt keine Lösung
  oder Spatprodukt $\left(RV_g, RV_h, AP_g - AP_h\right) \neq 0$

7. Ebene

- Ebene zeichnen: Spurgeraden zeichnen, dazu je zwei Koordinaten 0 setzen
- Parameterform → Koordinatenform: Kreuzprodukt der RVs ergibt NV, dessen Werte als Koeffizienten nehmen: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$, Aufpunkt einsetzen um c zu bestimmen
- Koordinatenform → Parameterform: drei Pkte berechnen (je zwei Koordinaten 0, dritte berechnen), dann Ebene aus drei Punkten aufstellen
- Koordinatenform → HNF: durch Betrag des NVs dividieren mit $c \leq 0$

8. Gerade - Ebene

- Gerade schneidet Ebene: PF: $g = E$ setzen; KoF: g in E einsetzen → SP
- Gerade senkrecht Ebene: $RV_g || NV_E$ **oder** $RV_g \circ RV_{E1} = RV_g \circ RV_{E2} = 0$
- Gerade parallel Ebene: $g = E$ setzen ergibt keinen SP **oder** $RV_g \circ NV_E = 0$, AP von $g \notin E$
- Gerade liegt in Ebene: $g = E$ setzen ergibt unendlich viele SPs

9. Ebene - Ebene

- beide in Koordinatenform: identisch, wenn eine Gleichung Vielfaches der anderen
- parallel, wenn NVs linear abhängig und Punktprobe negativ
- sonst Schnittgerade: eine Koordinate gleich λ setzen, je nach beiden anderen Koordinaten auflösen:
  - wahre Aussage → E_1 identisch mit E_2
  - falsche Aussage → $E_1 || E_2$
  - Schnittgerade, z.B.: $\begin{aligned} x_1 &= -2 + 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- eine PF, eine KoF: PF in KoF einsetzen, einen Parameter eliminieren, in PF einsetzen

10. Abstände

- Abstand zweier Punkte P, Q: Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ bestimmen
- Punkt-Gerade: RV der Geraden als NV einer Ebene die P enthält, SP von g und E, Abstand von SP und P bestimmen.
- Punkt-Ebene: Punkt in HNF der Ebene einsetzen (auch bei Ebene-Ebene)
- Gerade-Ebene: beliebigen Punkt von Gerade in HNF der Ebene einsetzen (auch bei E-E, s.o.)
- Windschiefe Geraden: Kreuzprodukt der RVs als NV einer Ebene, die eine der Geraden enthält (AP einsetzen), in HNF umformen, Punkt der anderen Geraden einsetzen