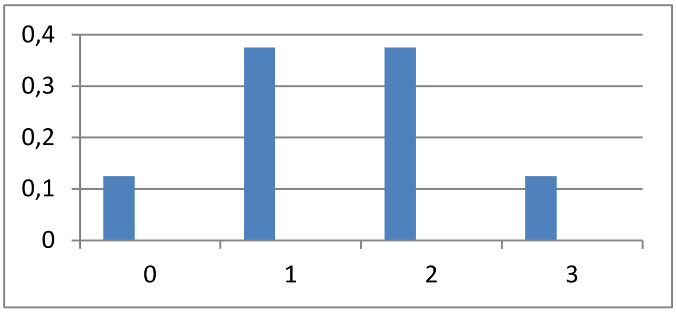
Aufgaben zu Zufallsgrößen – Lösung

1.a) (Eventuell mit Baumdiagramm)

z_i	0	1	2	3
$P(Z = a_i)$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$



b) $P(Z \geq 2) = \mathbf{0{,}5}$ ist die Wahrscheinlichkeit dass mindestens 2 mal Zahl geworfen wird.

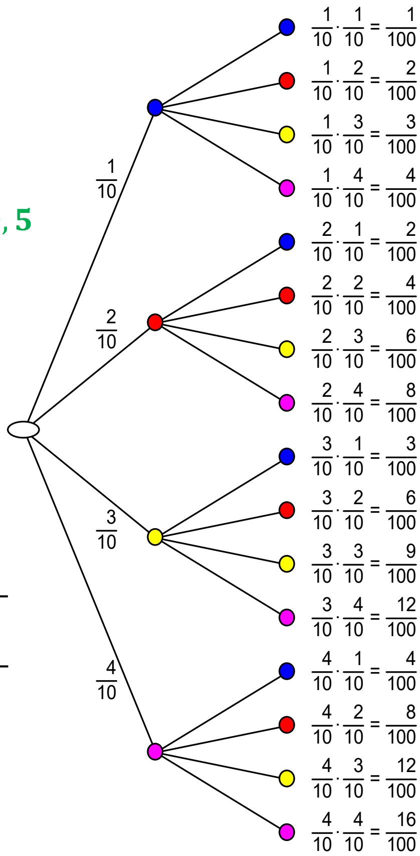
c) $E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{1{,}5}$

$Var(Z) = (0 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

$\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2.a)

z_i	0	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	$\frac{70}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$



b) $E(Z) = 0 \cdot \frac{70}{100} + 1 \cdot \frac{16}{100} + 2 \cdot \frac{9}{100} + 3 \cdot \frac{4}{100} + 4 \cdot \frac{1}{100} = \mathbf{0{,}5}$

Für ein faires Spiel müsste der Einsatz 50 Cent betragen.

c)

g_i	$-0{,}75$	$0{,}25$	$1{,}25$	$2{,}25$	$3{,}25$
$P(G = g_i)$	$\frac{70}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$

Der Erwartungswert ist jetzt natürlich $E(G) = \mathbf{-0{,}25}$.

$$Var(G) = (-0.75 + 0.25)^2 \cdot \frac{70}{100} + (0.25 + 0.25)^2 \cdot \frac{16}{100} + $$
$$+ (1.25 + 0.25)^2 \cdot \frac{9}{100} + (2.25 + 0.25)^2 \cdot \frac{4}{100} + $$
$$+ (3.25 + 0.25)^2 \cdot \frac{1}{100} = \mathbf{\frac{79}{100}}$$

$\sigma(G) = \sqrt{Var(G)} = \mathbf{\frac{\sqrt{79}}{10}}$

3.a) $P(A > 2) = 1 - P(A \leq 2) = 1 - 0{,}75 = \mathbf{0,25}$

b) $P(A = 1) = P(A \leq 2) - P(A \leq 1) = 0{,}75 - 0{,}55 = \mathbf{0,2}$

c) $E(A) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}1 = \mathbf{1,5}$

Im Schnitt werden 1,5 Fragen richtig beantwortet.

d) $Var(A) = (0 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}25 + (2 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}2 +$
$+(3 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}15 + (4 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 = \mathbf{1,75}$

4.a) $E(X) = 5 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 3{,}5 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 1{,}5 \cdot 0{,}2 = \mathbf{3,4}$

$E(Y) = 5 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2 - 3 \cdot 0{,}2 - 4{,}5 \cdot 0{,}2 = \mathbf{0,1}$

b) $Var(X) = [(5 - 3{,}4)^2 + (4 - 3{,}4)^2 + (3{,}5 - 3{,}4)^2 + (3 - 3{,}4)^2 + (1{,}5 - 3{,}4)^2] \cdot 0{,}2 = \mathbf{1,34}$

$Var(Y) = [(5 - 0.1)^2 + (2 - 0.1)^2 + (1 - 0.1)^2 + (-3 - 0.1)^2 + (-4.5 - 0.1)^2] \cdot 0.2 = \mathbf{11.84}$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.34} \approx \mathbf{1,16}$

$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{1.34} \approx \mathbf{3,44}$

c) Schütze 1 weicht im Schnitt 3,4cm nach oben ab, Schütze 2 nur 0,1cm nach oben.

Schütze 1 hat jedoch die deutlich geringere Varianz und Standardabweichung.

Schütze 1 ist der bessere Schütze, er sollte lediglich immer etwas tiefer zielen, Schütze 2 muss einfach mehr trainieren.