Wendepunkte, Krümmung – Aufgaben

1. Bestimme Lage und Art der Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

2. Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto -3x^2 - 12x - 9$, $D_p = R$. Bestimme Wertemenge der Funktion p sowie Symmetrieeigenschaften und Monotoniebereiche des Graphen G_p der Funktion p!

3. Betrachtet wird die Funktion $g(x) = \frac{1}{3}\ x^3 - 4x^2 + 12x$ auf $D = R$.

   a) Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie und bestimme die Nullstellen der Funktion.

   b) Bestimme Lage und Art der Extrema sowie Monotoniebereiche des Graphen der Funktion.

   c) Untersuche die Funktion auf Wendepunkte und bestimme das Krümmungsverhalten des Graphen.

   d) Bestimme die Funktionsgleichung der Wendetangente und zeichne den Graphen der Funktion unter Verwendung aller Deiner Ergebnisse.

4. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $h(x) = 0{,}5x^3 - \frac{1}{8}x^4,\ x \in R$.

   a) Bestimme die Nullstellen der Funktion und untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie.

   b) Bestimme das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion. Bestimme Art und Lage des Extrempunktes und die Wertemenge der Funktion f.

   c) Bestimme das Krünmmungsverhalten des Graphen und berechne die Koordinaten der Wendepunkte. Bestimme auch die Gleichungen der Wendetangenten.

   d) Zeichne unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h der Funktion für $x \in [-2; 4{,}5]$.

Wendepunkte, Krümmung – Lösung

1. $f'(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $f'(x) = 0$, durch probieren: $x_1 = 1$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x - 1) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 3x^2 - x \\
\quad \underline{-(3x^2 - 3x)} \\
\qquad 2x - 2
\end{array}
$$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -1$; $x_3 = -2$

$f''(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$f(1) = 3\frac{5}{12}$, $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow \underline{Min\left(1|3\frac{5}{12}\right)}$;

$f(-1) = 6\frac{1}{12}$, $f''(-1) = -2 < 0 \rightarrow \underline{Max\left(-1|6\frac{1}{12}\right)}$

$f(-2) = 5\frac{2}{3}$, $f''(-2) = 3 > 0 \rightarrow \underline{Min\left(-2|5\frac{2}{3}\right)}$

2. Bestimmen des Scheitelpunkts durch Scheitelpunktsform oder erste Ableitung gleich Null setzen: $S(-2|3)$

   Graph verläuft: sms für $x \in]-\infty; -2]$, smf für $x \in [-2; +\infty[$

   Graph verläuft achsensymmetrisch zu $x = -2$, $W = [-\infty; 3[$

3. Betrachtet wird die Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x$.

   a) Keine spezielle Symmetrie da Potenzen mit geraden und ungeraden Exponenten.

   Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 6$

   b) $g'(x) = x^2 - 8x + 12 \rightarrow g'(x) = 0$ setzen $\rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 6$

   Aufgrund des Verlaufs des Graphen (Hoch3-Funktion von l.u. nach r.o.) folgt:

   $E_1(2|10{,}67)$ ist ein lokales Maximum

   $E_2(6|0)$ ist ein lokales Minimum

   Monotoniebereiche: sms für $x \in]-\infty; 2]$ und $x \in [2; +\infty[$

   smf für $x \in [2; 6]$

   c) $g''(x) = 2x - 8 \rightarrow g''(x) = 0$ setzen $\rightarrow x = 4$

   $g''(x) < 0$ für $x < 4$ also Graph auf $x \in]-\infty; 4]$ rechtgekrümmt

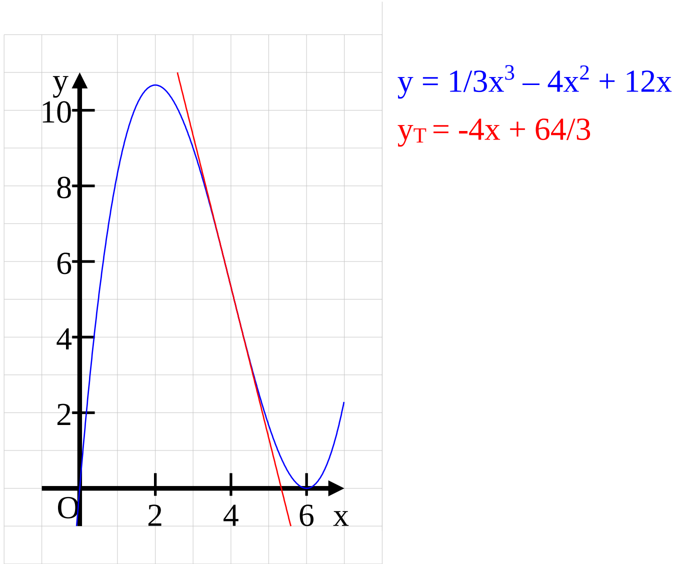
   $g''^{(x)} > 0$ für $x > 4$ also Graph auf $x \in [4; +\infty[$ linksgekrümmt

   $\rightarrow$ Wendepunkt bei $W(4|5{,}33)$ da Krümmungswechsel.

d) Steigung beim Wendepunkt: $g'(4) = -4$

WP und Steigung einsetzen in $y_T = mx + t$

Ergibt: $y_T = -4x + \frac{64}{3}$



4. Vorgehen wie bei Aufgabe 3, Ergebnisse siehe Graph: