Aufgabe 1 (Die Oberflächen- und Volumenformeln anwenden). Berechne das Volumen und die Oberfläche der beschriebenen geometrischen Körper.

a) Mit den beiden Angaben lassen sich die Formeln für Oberfläche und Volumen eines Zylinders direkt verwenden:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot (3{,}2\,\text{cm})^2 + 2\pi \cdot (3{,}2\,\text{cm}) \cdot (5{,}1\,\text{cm}) \approx 166{,}9\,\text{cm}^2$$
$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (3{,}2\,\text{cm})^2 \cdot (5{,}1\,\text{cm}) \approx 164{,}1\,\text{cm}^3$$

b) Wir berechnen zunächst die Grundfläche des Prismas. Wählt man eine Kathete als Grundlinie des rechtwinkligen Dreiecks, so entspricht die andere Kathete gerade der Höhe des Dreiecks:

$$G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (4{,}0\,\text{cm}) \cdot (3{,}0\,\text{cm}) = 6{,}0\,\text{cm}^2$$

Um den Umfang der Grundfläche ausrechnen zu können, müssen wir die Länge der Hypothenuse mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3{,}0\,\text{cm})^2 + (4{,}0\,\text{cm})^2} = \sqrt{9{,}0\,\text{cm}^2 + 16\,\text{cm}^2} = \sqrt{25\,\text{cm}^2} = 5{,}0\,\text{cm}$$

Damit ist der Umfang der dreieckigen Grundfläche:

$$u = 3{,}0\,\text{cm} + 4{,}0\,\text{cm} + 5{,}0\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$$

Jetzt können wir alle Angaben in die Formeln für Oberfläche und Volumen einsetzen:

$$O = 2 \cdot G + u \cdot h = 2 \cdot (6{,}0\,\text{cm}^2) + (12\,\text{cm}) \cdot (3{,}0\,\text{cm}) = 48\,\text{cm}^2$$
$$V = G \cdot h = (6{,}0\,\text{cm}^2) \cdot (3{,}0\,\text{cm}) = 18\,\text{cm}^3$$

c) Der Umfang der Grundfläche ist in diesem gleichseitigen Dreieck gerade:

$$u = 3 \cdot (2{,}0\,\text{cm}) = 6{,}0\,\text{cm}$$

Zur Berechnung der Grundfläche benötigen wir die Höhe des gleichseitigen Dreiecks. Für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a = 2{,}0\,\text{cm}$ ist die Höhe gerade:

$$h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2{,}0\,\text{cm}) = \sqrt{3}\,\text{cm}$$

Also ist die Grundfläche:

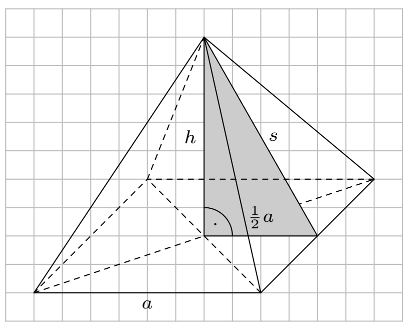
$$G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\Delta = \frac{1}{2} \cdot (2{,}0\,\text{cm}) \cdot (\sqrt{3}\,\text{cm}) \approx 1{,}73\,\text{cm}^2$$

Jetzt können wir alle Angaben in die Formeln für Oberfläche und Volumen einsetzen:

$$O = 2 \cdot G + u \cdot h \approx 2 \cdot (1{,}73\,\text{cm}^2) + (6{,}0\,\text{cm}) \cdot (3{,}0\,\text{cm}) \approx 21{,}5\,\text{cm}^2$$
$$V = G \cdot h \approx (1{,}73\,\text{cm}^2) \cdot (3{,}0\,\text{cm}) \approx 5{,}2\,\text{cm}^3$$

d) Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat und hat den Flächeninhat:

$$G = a^2 = (3{,}5\,\text{cm})^2 = 12{,}25\,\text{cm}^2$$



Der Mantel der Pyramide besteht aus vier Dreiecken mit identischem Flächeninhalt. Ihre Grundlinie ist a, ihre Höhe s berechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und der nebenstehenden Skizze:

$$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2} = \sqrt{(4{,}1\,\text{cm})^2 + \left(\frac{3{,}5\,\text{cm}}{2}\right)^2} \approx 4{,}46\,\text{cm}$$

Also ist die Mantelfläche:

$$M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot s \approx 2 \cdot (3{,}5\,\text{cm}) \cdot (4{,}46\,\text{cm}) \approx 31{,}22\,\text{cm}^2$$

Jetzt können wir alle Angaben in die Formeln für Oberfläche und Volumen einsetzen:

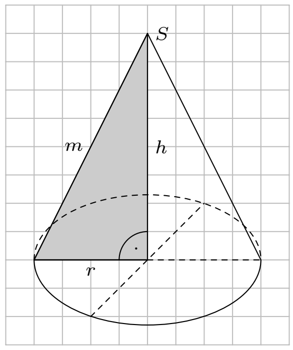
$$O = G + M \approx 12{,}25\,\text{cm}^2 + 31{,}22\,\text{cm}^2 \approx 43{,}5\,\text{cm}^2$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12{,}25\,\text{cm}^2) \cdot (4{,}1\,\text{cm}) \approx 16{,}7\,\text{cm}^3$$

e) Wir gehen ähnlich vor, wie bei der Pyramide. Die Grundfläche ist ein Kreis mit Flächeninhalt:

$$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (8{,}4\,\text{cm})^2 \approx 221{,}67\,\text{cm}^2$$

Die Mantellinie m, die wir zur Berechnung der Oberfläche benötigen, erhalten wir mit Hilfe der Skizze und dem Satz des Pythagoras:

$$m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(8{,}4\,\text{cm})^2 + (5{,}2\,\text{cm})^2} \approx 9{,}88\,\text{cm}$$



Jetzt können wir alle Angaben in die Formeln für Oberfläche und Volumen einsetzen:

$$O = \pi r^2 + \pi r \cdot m \approx \pi \cdot (8{,}4\,\text{cm})^2 + \pi \cdot (8{,}4\,\text{cm}) \cdot (9{,}88\,\text{cm}) \approx 482{,}4\,\text{cm}^2$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (8{,}4\,\text{cm})^2 \cdot (5{,}2\,\text{cm}) \approx 384{,}2\,\text{cm}^3$$

Aufgabe 2 (Konservendose). Das Papier ist ein Rechteck mit der Breite $b = 12\,\text{cm}$. Die Länge des Rechtecks berechnet sich aus dem Umfang des Zylinders und dem doppelt beklebten Stück:

$$l = 2\pi r + 0{,}5\,\text{cm} = 2\pi \cdot \frac{d}{2} + 0{,}5\,\text{cm} = 2\pi \cdot (2{,}5\,\text{cm}) + 0{,}5\,\text{cm} \approx 16{,}21\,\text{cm}$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt des Papiers bestimmen:

$$A = l \cdot b \approx (12\,\text{cm}) \cdot (16{,}21\,\text{cm}) \approx 194{,}5\,\text{cm}^2$$

Aufgabe 3 (Litfaßsäule). Grob abgeschätzt hat eine Litfaßsäule etwa einen Durchmesser von einem Meter und eine Höhe von 3,5 Metern. Aus diesen Angaben lässt sich leicht (wie in der vorhergehenden Aufgabe) die gesamte Werbefläche berechnen:

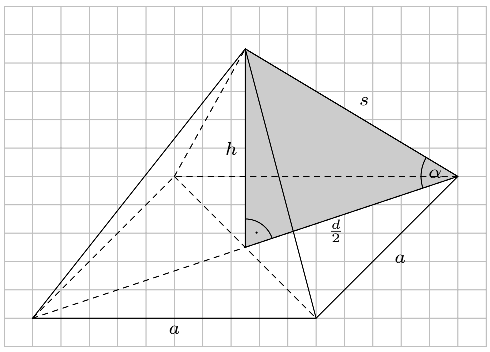
$$A_1 = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot h = 2\pi \cdot (0{,}5\,\text{m}) \cdot (3{,}5\,\text{m}) \approx 11\,\text{m}^2$$

Ein DIN-A1-Poster hat einen Flächeninhalt von etwa:

$$A_2 = (0{,}594\,\text{m}) \cdot (0{,}841\,\text{m}) \approx 0{,}5\,\text{m}^2$$

Theoretisch hätten also $\frac{A_1}{A_2} \approx 22$ Plakate auf der Litfaßsäule Platz. Allerdings müssten wohl einige der Plakate zerschnitten werden, um die volle Werbefläche zu befüllen.

Aufgabe 4 (Louvre).
Um das Volumen der Glaspyramide zu berechnen, benötigen wir ihre Höhe h. Wir nennen die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche a und die Seitenkanten der Pyramide s. Die Diagonale der Grundfläche ist $d = a\sqrt{2}$, also gilt nach dem Satz von Pythagoras (siehe Skizze in der Lösung zu Aufgabe 6a):



$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} =$$
$$= \sqrt{(32{,}4\,\text{m})^2 - \frac{(34{,}2\,\text{m})^2}{2}} \approx 21{,}56\,\text{m}$$

Dann ist nach der Formel für das Volumen einer Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h \approx \frac{1}{3} \cdot (34{,}2\,\text{m})^2 \cdot (21{,}56\,\text{m}) \approx 8\,400\,\text{m}^3$$

Aufgabe 5 (Quader als spezielles Prisma). Die Formel für die die Oberfläche eines Prismas lautet:

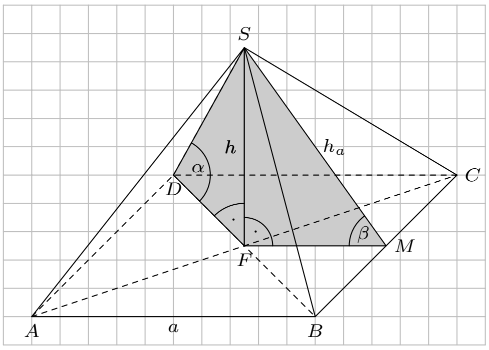
$$O = 2 \cdot G_{\mathrm{P}} + u_G \cdot h$$

Die Grundfläche G_{P} ist ein Rechteck mit Flächeninhalt $A_{\mathrm{R}} = l \cdot b$. Der Umfang der Grundfläche u_{G} ist gerade $2 \cdot l + 2 \cdot b = 2 \cdot (l + b)$. Damit gilt für die Oberfläche des Prismas:

$$O = 2 \cdot (l \cdot b) + 2 \cdot (l + b) \cdot h = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$$

Aufgabe 6 (Neigungswinkel bestimmen).

a) *Bestimmung von α:*
Es gilt:



$$\tan\alpha = \frac{\overline{SF}}{\overline{DF}} = \frac{h}{\overline{DF}}$$

Die Strecke $[DF]$ ist halb so lang, wie die Diagonale der Grundfläche, einem Quadrat mit Seitenlänge $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Für die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge a gilt allgemein $d = a\sqrt{2}$, also:

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm} \approx 3{,}54\,\mathrm{cm}$$

Also ist der Winkel α:

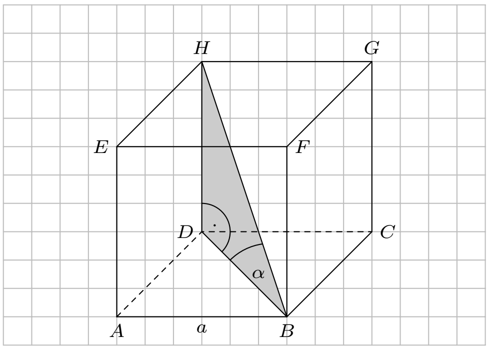
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{\overline{DF}}\right) \approx \tan^{-1}\left(\frac{3{,}5}{3{,}54}\right) \approx 44{,}7°$$

Bestimmung von β:
Analog gilt:

$$\tan\beta = \frac{\overline{SF}}{\overline{FM}} = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

$$\rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{\frac{1}{2}a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}5}{2{,}5}\right) \approx 54{,}5°$$

b) Der nebenstehenden Skizze lässt sich entnehmen:



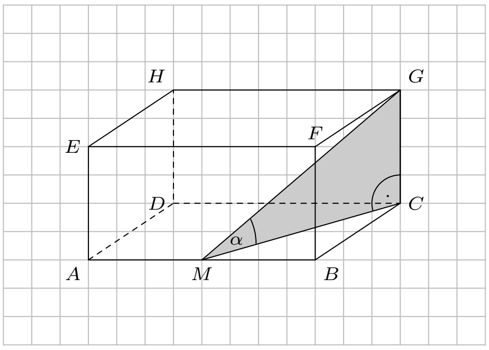
$$\tan\alpha = \frac{\overline{DH}}{\overline{BD}}$$

Die Strecke $[DH]$ ist eine Seitenkante und hat damit die Länge a. Die Strecke $[BD]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge a und hat damit die Länge $a\sqrt{2}$. Damit gilt für den Neigungswinkel:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{a\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35{,}3°$$

Man sieht, dass der Neigungswinkel α unabhängig von der Seitenlänge des Quadrats a ist.

c) Die Länge der Strecke $[MB]$ ist:



$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = 4\,\text{cm}$$

Berechne die Länge der Strecke $[MC]$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

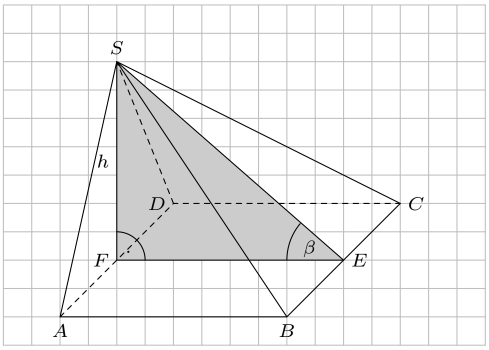
$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{MB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\text{cm} = 4\sqrt{2}\,\text{cm} \approx 5{,}66\,\text{cm}$$

Der gesuchte Winkel lässt sich mit Hilfe der Tangens-Beziehung ausrechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CG}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{MC}}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{MC}}\right) \approx \tan^{-1}\left(\frac{5}{5{,}66}\right) = 41{,}5°$$

d) Der nebenstehenden Skizze lässt sich entnehmen:



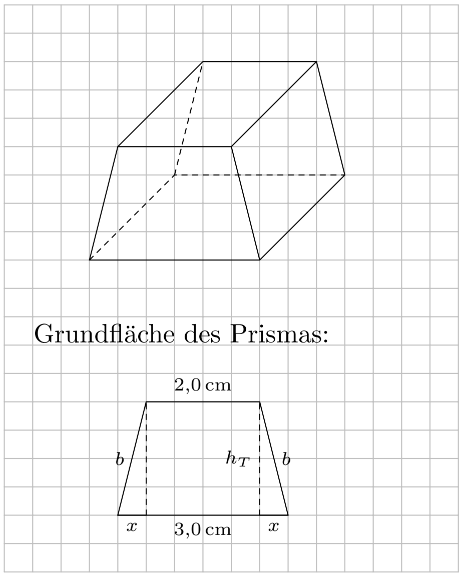
$$\tan\beta = \frac{\overline{FS}}{\overline{FE}}$$

Die Strecke $[FS]$ entspricht gerade der Höhe h der Pyramide, die Strecke $[FE]$ der Seitenlänge der quadratischen Grundfläche. Damit gilt für den Neigungswinkel:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 39{,}8°$$

Aufgabe 7 (Pralinenverpackung).

Gesucht ist der Oberflächeninhalt der Praline.



Wir kippen die abgebildete Praline gemäß dem Hinweis in Gedanken einmal auf uns zu. Der Körper ist ein Prisma, seine Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez.

Bestimmung der Trapezschenkel b (siehe Skizze):
Es handelt sich um ein gleichschenkliges Trapez. Mit Hilfe der Überlegungen aus der Skizze und dem Satz von Pythagoras ist die Länge des Trapezschenkels b:

$$x = \frac{3\,\text{cm} - 2\,\text{cm}}{2} = 0{,}5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt{(2\,\text{cm})^2 + (0{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{4{,}25}\,\text{cm} \approx 2{,}06\,\text{cm}$$

Die Oberfläche lässt sich mit der Trapezhöhe h_T, der Prismenhöhe h_P und dem Umfang des Trapezes u_T folgendermaßen berechnen:

$$G = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h_T = \frac{1}{2} \cdot (3\,\text{cm} + 2\,\text{cm}) \cdot 2\,\text{cm} = 5\,\text{cm}^2$$

$$M = h_P \cdot u_T \approx 3\,\text{cm} \cdot (2\,\text{cm} + 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2{,}06\,\text{cm}) \approx 27{,}4\,\text{cm}^2$$

$$O = 2G + M \approx 2 \cdot 5\,\text{cm}^2 + 27{,}4\,\text{cm}^2 \approx 37{,}4\,\text{cm}^2$$