Lösungen Crashkurs – 8. Jahrgangsstufe

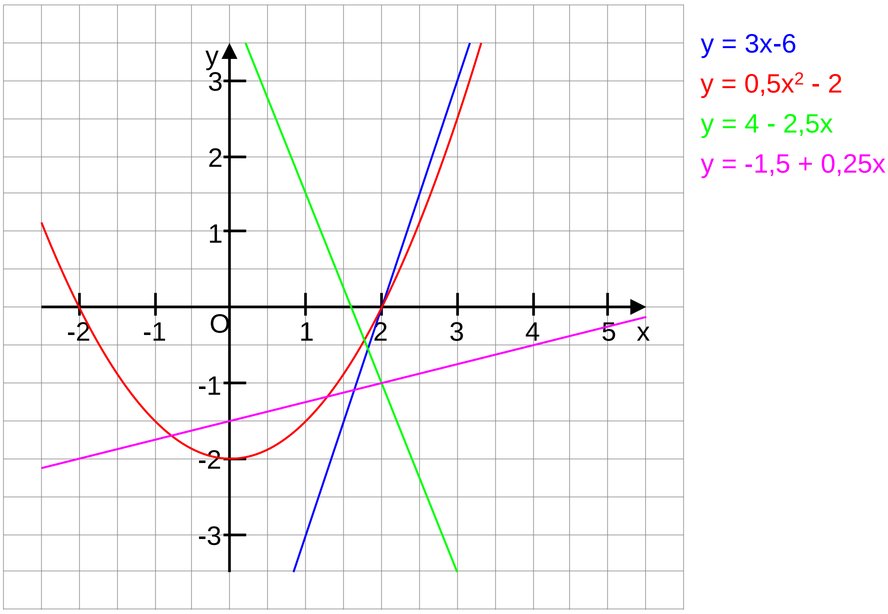
I. Funktionen und Terme

1. Jedem x-Wert ist eindeutig ein einziger y-Wert zugeordnet, also:
   a) ja b) nein c) ja

2. a) $D = \mathbb{Q}\backslash\{0;\ -5\}$ b) $D = \mathbb{Q}\backslash\{18;\ -18\}$ c) $D = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

3. Nullstelle ist die x-Koordinate eines Schnittpunktes von einem Graphen mit der x-Achse. Die Steigung eines Graphen zeigt, wie stark sich die y-Werte bei einer bestimmten Änderung der x-Werte ändern.

   a. Steigung $m = 3$
      Nullstelle $x = 2$
   b. Steigung variiert
      Nullstellen $x_1 = 2$
      $x_2 = -2$
   c. Steigung $m = -2{,}5$
      Nullstelle $x = 1{,}6$
   d. Steigung $m = 0{,}25$
      Nullstelle $x = 6$



II. Lineare Funktionen

4. (1) → h(x); (2) → f(x); (3) → i(x); (4) → g(x)

5. a) Steigung $m = -1{,}5 \Longrightarrow f(x) = -1{,}5x + t$

   Man muss jetzt noch den y-Achsenabschnitt t bestimmen. Setze dazu den Punkt $P(-3/2)$ in die Funktion ein und berechne t:

$$2 = -1{,}5 \cdot (-3) + t$$
$$2 = 4{,}5 + t \qquad |-4{,}5$$
$$-2{,}5 = t$$

   $\Longrightarrow f(x) = -1{,}5x - 2{,}5$

   Bei den anderen Aufgaben geht man analog vor:

   b) $f(x) = 2x + 3$
   c) $f(x) = 0{,}25x + 1$
   d) $f(x) = -0{,}25x + 2{,}75$

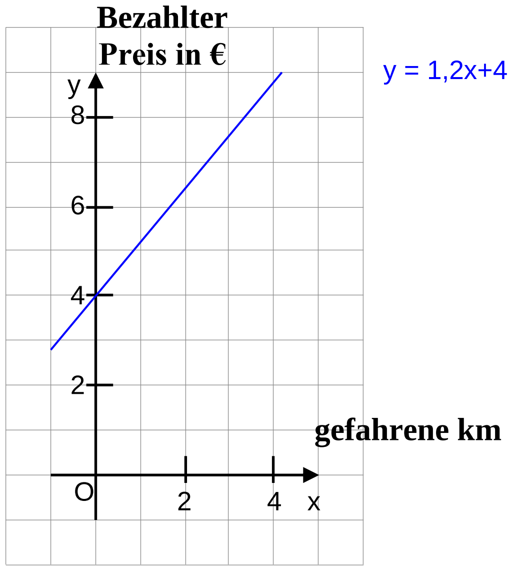
6. a) $t(x) = 1{,}2x + 4$ (Graph natürlich erst ab x > 0)

b) Setze im Funktionsterm aus Aufgabe a) für t(x) 17,80 ein und löse die dabei entstehende Gleichung nach x auf.

Lösung:11,5km.

c) Setzte im Funktionsterm aus Aufgabe a) für x 6,25 ein und berechne t(x)

Lösung: 11,5 Euro.



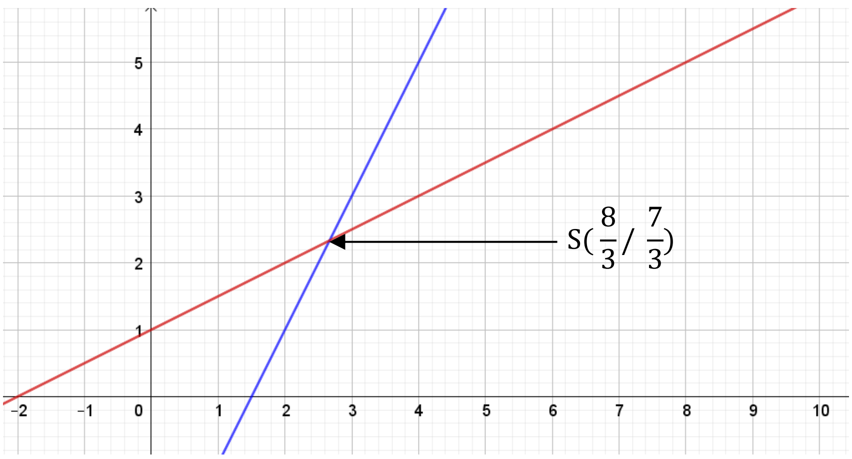
7. a)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x - 3 &= 1 + 0{,}5x \quad && | -0{,}5x \\ 1{,}5x - 3 &= 1 \quad && | +3 \\ 1{,}5x &= 4 \quad && |: 1{,}5 \\ x &= \tfrac{8}{3} = 2{,}\overline{6} \end{aligned}$$

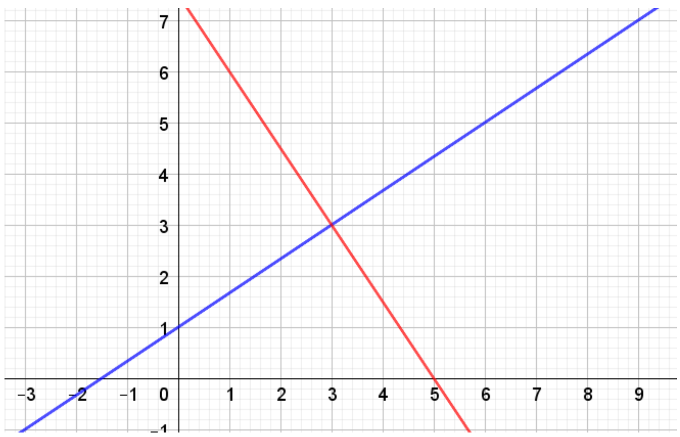
Berechne jetzt noch die y-Koordinate des Schnittpunkts. Setze dazu $x = \frac{8}{3}$ in eine der beiden Funktionen ein: $y = 2 \cdot \frac{8}{3} - 3 = \frac{7}{3}$

$\Longrightarrow$Schnittpunkt $S(\frac{8}{3} / \frac{7}{3})$

Grafisch:



b) Man geht genauso wie in Aufgabe b vor.
Lösung: S(3/ 3)

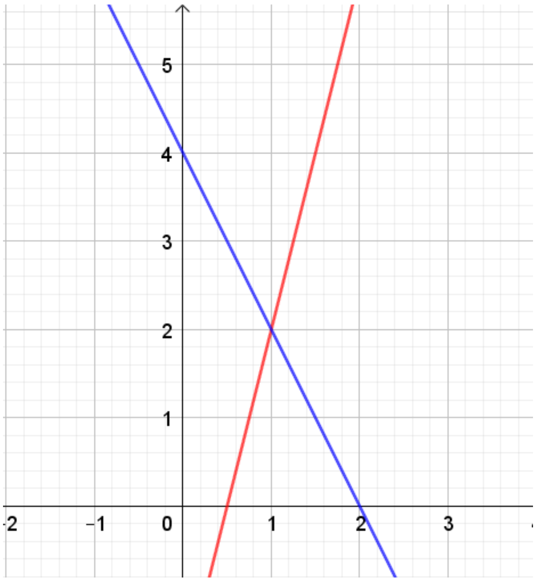


8. a)

$$4x - 2 > -2x + 4 \qquad | + 2x \quad | + 2$$
$$6x > 6 \qquad |:6$$
$$x > 1$$

$\Longrightarrow$ Lösungsmenge $L =]1; \infty[$

Grafisch: Zeichne die Graphen der beiden Funktionen $y = 4x - 2$ und $y = -2x + 4$



Man erkennt, dass der Graph von $y = 4x - 2$ (rot) für $x > 1$ oberhalb des Graphen von $y = -2x + 4$ verläuft. $\Longrightarrow$ Lösungsmenge $L =]1; \infty[$

Bei den anderen Aufgaben geht man analog vor.

b) $L =]-\infty; 3]$

c) $L = [2; \infty[$

9. Bei einer proportionalen Zuordnung ändern sich zwei einander zugeordnete Größen im gleichen Verhältnis. Verdoppelt man die eine Größe, verdoppelt sich die andere Größe, verdreifacht man die eine Größe, verdreifacht sich die andere Größe usw.
So ist der zu zahlende Preis für ein bestimmtes Gemüse proportional zur Menge, die man kauft. Dabei ist der Quotient zugeordneter Größen immer gleich und die Punkte des Graphen liegen auf einer Ursprungsgeraden.

10. Der Quotient $\frac{x}{y}$ muss für alle Zahlenpaare den gleichen Wert ergeben: $\frac{x}{y} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$. Dies ist auch der Proportionalitätsfaktor.

$\Longrightarrow$

x	-3	6	**9**	10,5
y	**-7**	14	21	**24,5**

11. a) ja b) nein c) nein d) ja

III. Elementare gebrochen-rationale Funktionen

12. $$\mathbf{g: x \longmapsto \frac{3}{x-2} - 2,5}$$

Verschiebung um 2 nach rechts

Senkrechte Asymptote: x = 2

Verschiebung um 2,5 nach unten

Waagerechte Asymptote y = -2

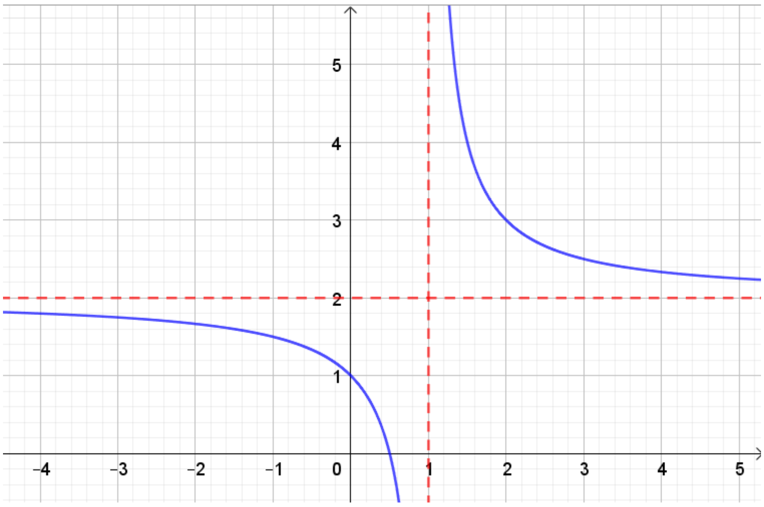
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2,5 Einheiten nach unten und 2 Einheiten nach rechts hervor.

13. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$,

waagerechte Asymptote: $y = 2$

senkrechte Asymptoten: $x = 1$

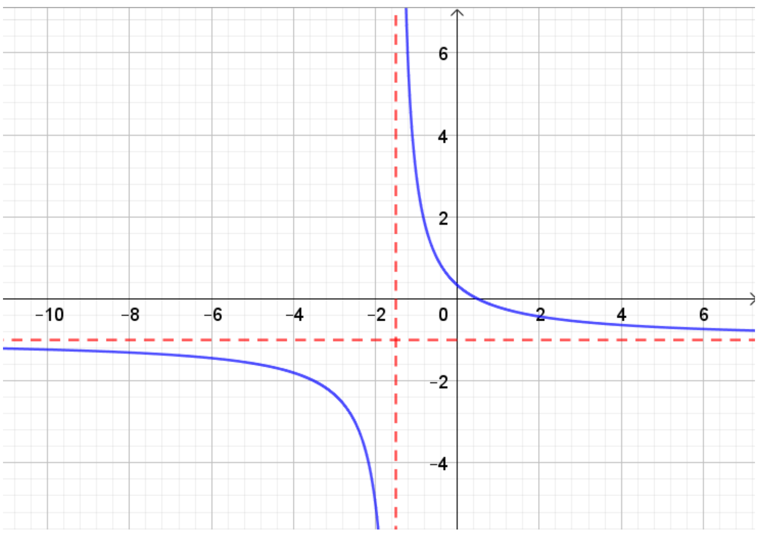
Zum Zeichnen zuerst eine Wertetabelle erstellen und die Asymptoten einzeichnen.



b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1,5\}$

waagerechte Asymptote: $y = -1$

senkrechte Asymptoten: $x = -1,5$



14. Aus dem Diagramm abgelesen:
Waagerechte Asymptote: $y = -1$
Senkrechte Asymptote: $x = -2$
$\Longrightarrow f(x) = \frac{a}{x+2} - 2$
Mann muss nun noch a bestimmen. Wähle dazu einen beliebigen Punkt, der auf dem Graphen liegt und setze ihn in den Funktionsterm ein: $P(-1/1)$

$$1 = \frac{a}{1+2} - 2 \qquad |+2$$
$$3 = \frac{a}{3} \qquad |\cdot 3$$
$$9 = a$$

$\Longrightarrow f(x) = \frac{9}{x+2} - 2$

15. Beispielsweise beim Streichen einer Hauswand: Die Anzahl der Arbeiter, die beim Streichen mithelfen, ist indirekt proportional zur Zeitdauer für das Streichen der Wand.

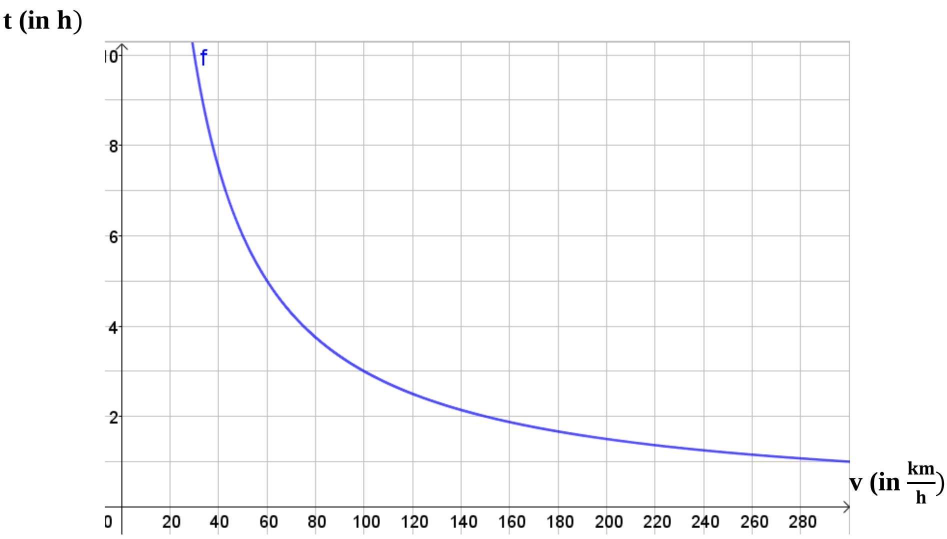
- Eigenschaften: Verdoppelt man die eine Größe, halbiert sich die andere Größe; verdreifacht man die eine Größe, drittelt sich die andere Größe usw.,
- Das Produkt der zugeordneten Größen ist konstant,
- Der Graph bei einer indirekt proportionalen Zuordnung ist eine Hyperbel.

16. Indirekt proportionale Zuordnungen haben die Form: $f(x) = \frac{a}{x}$
Bestimme a:

$$f(100) = \frac{a}{100} = 3$$

$\Longrightarrow a = 300 \Longrightarrow f(x) = \frac{300}{x}$
Damit kann man die Tabelle bestimmen:

v (in $\frac{km}{h}$)	**50**	**200**	**150**	**75**	**125**	**300**
t (in h)	**6**	**1,5**	**2**	**4**	**2,4**	**1**



Aus der Zeichnung: Bei $v = 120$ km/h braucht man 2,5 h.

IV. Bruchterme und Bruchgleichungen

17. a) $\frac{18x^2y^3}{45x^4y} = \frac{2y^2}{9x^2}$

b) $\frac{5x-15}{x^2-3x} = \frac{5\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} = \frac{5}{x}$

c) $\frac{42}{75n^2} : \frac{63}{100n} = \frac{42}{75n^2} \cdot \frac{100n}{63} = \frac{2}{3n} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9n}$

d) $\left(\frac{p}{q} + 1\right) \cdot \frac{q}{p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} + \frac{q}{p} = 1 + \frac{q}{p}$

e) $\frac{8}{x-2} : \frac{24x}{10-5x} = \frac{8}{x-2} \cdot \frac{10-5x}{24x} = \frac{8}{x-2} \cdot \frac{5\cdot(2-x)}{24x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{3x} = \frac{5}{3x}$

f) $\frac{x^3(1-x)}{x} \cdot \frac{(2x)^2}{x-1} = \frac{x^3\cdot(1-x)\cdot(2x)\cdot(2x)}{x\cdot(x-1)} = \frac{x^2\cdot(-1)\cdot(-1+x)\cdot 4x^2}{(x-1)} = \frac{x^2\cdot(-1)\cdot 4x^2}{1} = \frac{-4x^4}{1} =$

$-4x^4$

18. a) $\frac{1}{4x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1\cdot x}{(4x-5)\cdot x} + \frac{1\cdot(4x-5)}{x\cdot(4x-5)} = \frac{x+4x-5}{(4x-5)\cdot x} = \frac{5x-5}{(4x-5)\cdot x}$

b) $\ldots = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

c) $\frac{1}{x^2+x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+1)} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+1)} - \frac{x\cdot x}{(x+1)\cdot x} = \frac{1-x^2}{(x+1)\cdot x}$

e) $\ldots = \frac{2c^2+2d^2}{c^2-d^2}$

f) $\frac{x+5}{3x-6} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{x+5}{3\cdot(x-2)} + \frac{2}{x\cdot(x-2)} = \frac{(x+5)\cdot x}{3\cdot(x-2)\cdot x} + \frac{2\cdot 3}{x\cdot(x-2)\cdot 3} = \frac{x^2+5x+6}{3x\cdot(x-2)}$

19. a)

$$\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+3} \qquad |\cdot(x-2)\cdot(x+3)$$

$$4\cdot(x+3) = 2\cdot(x-2)$$

$$\ldots$$

$$x = -8$$

b) $x = -\frac{1}{3}$

c) $$\frac{-2}{10x-5} - \frac{5}{2x-1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-2}{5\cdot(2x-1)} - \frac{5}{2x-1} = \frac{3}{2} \qquad | \cdot 5 \cdot (2x-1) \cdot 2$$

$$(-2)\cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot (2x-1)$$
$$-54 = 30x - 15 \qquad | + 15$$
$$-39 = 30x \qquad |: 30$$
$$-1{,}3 = x$$

20. Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{0; 2\}$

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{1}{2-x} = \frac{3}{x}$$
$$\ldots$$
$$x = 1{,}5$$

21. a) $a^5 \cdot a^3 \cdot a^{-4} \cdot a^2 = a^{5+3-4+2} = a^6$

b) $(-x)^6 : x^{-3} \cdot x^{-4} = x^6 : x^{-3} \cdot x^{-4} = x^{6-(-3)-4} = x^5$

c) $\left(\left(\frac{2}{x}\right)^{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{x}\right)^{(-3)\cdot(-2)} = \left(\frac{2}{x}\right)^6 = \frac{64}{x^6}$

d) $(-2x^3)^2 - 3\frac{x^8}{x^2} = 4x^6 - 3x^6 = x^6$

22. a) $$v = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad |: \frac{1}{2} \qquad |: t^2$$
$$\frac{v}{\frac{1}{2}\cdot t^2} = a$$

b) $$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} \qquad | \cdot T_2$$
$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot T_2 = P_2 \cdot V_2 \qquad |: \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1}$$
$$T_2 = P_2 \cdot V_2 \cdot \left(\frac{T_1}{p_1 \cdot V_1}\right)$$

c) $$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad | \cdot (t_2 - t_1)$$
$$a \cdot (t_2 - t_1) = v_2 - v_1 \qquad |: a$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} \qquad | + t_1$$
$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} + t_1$$

V. Laplace-Experimente

23. a) $\Omega = \{(1kk);\ (1kz); (1zk);\ (1zz);\ (2kk);\ (2kz); (2zk); (2zz); \dots\ (6kz);\ (6zz)\}$

b) $A = \{(6kk);\ (6kz); (6zk);\ (6zz)\}$

c) $\mathrm{B} = \{(1kk);\ (1kz); (1zk);\ (2kk);\ (2kz); (2zk); \dots\ (6kk);\ (6kz); (6zk)\}$

d) $P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6};\ P(B) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

24. a) $4^{10} = 1048576$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{1048576}$

c) $P(keine\ richtig) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59049}{1048576} \rightarrow P(mind. 1\ richtig) = 1 - \frac{59049}{1048576} = \frac{989527}{1048576}$

d) Er beantwortet höchstens fünf Fragen richtig.

e) $P(letzte\ richtig) = \frac{1}{4}$

VI. Lineare Gleichungssysteme

25. a) $\boldsymbol{x = -2}$

b) $x = 2$

c) $8x - (x + 2) = 6(x + 1) \Rightarrow x = 8$

d) $x = -1$

e) $x^2 - (x - 1)^2 = 33 \Rightarrow x = 17 \Rightarrow Die\ Zahlen\ sind\ 16\ und\ 17$

26.

a) Löse (II) nach x auf:

$3x + 6y = 9 \qquad | - 6y$

$3x = 9 - 6y \qquad | : 3$

(II*) $x = 3 - 2y$

Setze dies in (I) ein:

$$-4 \cdot (3 - 2y) + 3y = 10$$
$$-12 + 8y + 3y = 10 \qquad | + 12$$
$$11y = 22 \qquad |: 11$$
$$y = 2$$

Setze dies in (II*) ein:

$x = 3 - 2 \cdot 2 = -1$

$\Longrightarrow\ x = -1;\ \ y = 2$

b) (I) nach x auflösen:

$x = 8 - y$

In (II) einsetzen:

$-5 \cdot (8 - y) - 5y = 2$

$-40 + 5y - 5y = 2$

$-40 = 2$

Widerspruch!!

Wenn am Schluss eine falsche Aussage (wie z.B.: -40 = 2 oder 2 = 6) stehen bleibt, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung!

c) (I) nach y auflösen:

$3y = -8x - 6 \qquad | : 3$

$y = -\frac{8}{3}x - 2$

In (II) einsetzen:

$6 \cdot \left(-\frac{8}{3}x - 2\right) = -16x - 12$

$-16x - 12 = -16x - 12 \qquad | + 16x$

$-12 = -12$

Wahre Aussage!!

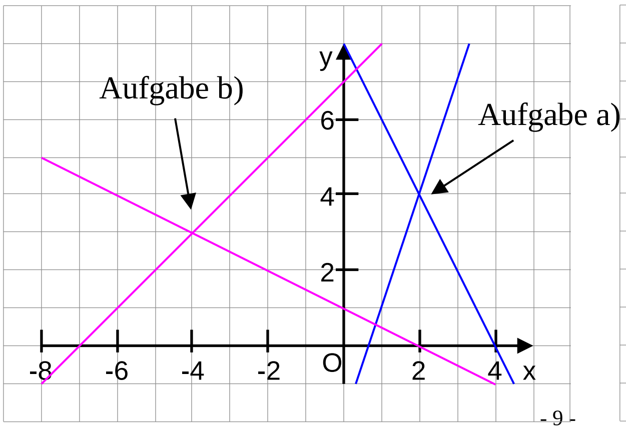
Wenn am Schluss eine wahre Aussage (wie z.B.: -12 = -12 oder 6 = 6) stehen bleibt, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen!

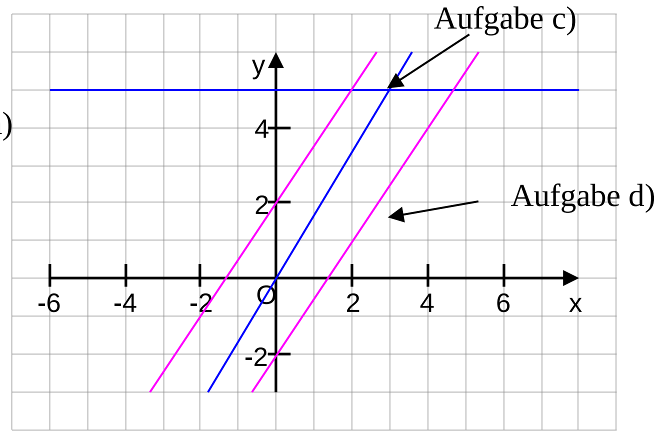
$\Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ und $y = -\frac{8}{3}x - 2$

27. Zeichne zunächst jeweils beide Graphen. Der Schnittpunkt ergibt die Lösung des Gleichungssystems

a) $(x = 2, y = 4)$ b) $(x = -4, y = 3)$

c) $(x = 3, y = 5)$ d) $keine\ Lösung$





28. Stelle zunächst ein Gleichungssystem zur Aufgabe auf:
a: Anzahl der Hasen; b: Anzahl der Hühner
(I) $x + y = 45$
(II) $4x + 2y = 130$

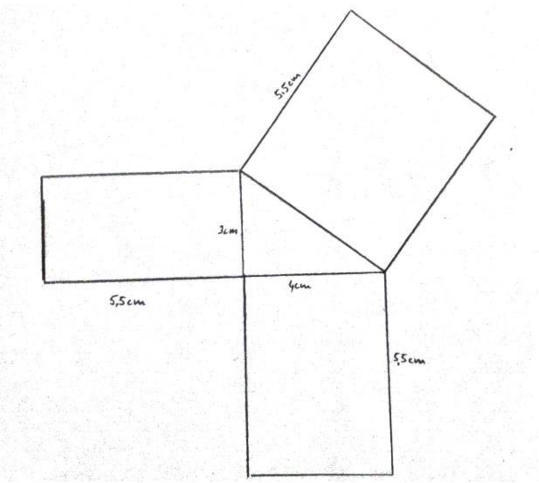
Löse dieses Gleichungssystem

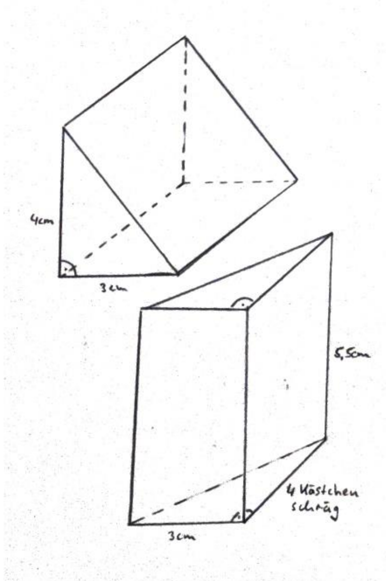
→ $(y = 25, x = 20), also\ 20\ Hasen\ und\ 25\ Hühner$

VII. Kreis, Prisma und Zylinder

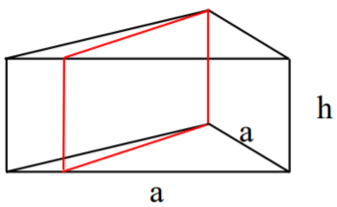
29.
a) a) $A \approx 132{,}7cm^2, U \approx 40{,}8cm$
b) $A \approx 411cm^2, U \approx 122{,}5cm$

30.
a) a) $h = 5{,}5cm$
b) Netz: siehe Skizze $O = 72cm^2$
c) Schrägbild: siehe Skizze, zwei Alternativen

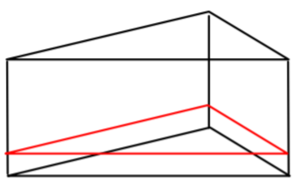




31.
a) a) Aus der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $a = 5cm$ ergibt sich durch Messen: $h_a \approx 3{,}5cm. \Rightarrow V = 52{,}5cm^3$
b) siehe Skizze



Teile eine Seite a im Verhältnis 1 : 4



Teile die Höhe im Verhältnis 1 : 4

32.

a. $r \approx 0{,}8cm$

b. $O \approx 9{,}7cm^2, V \approx 3{,}0cm^3$