Der Mathekurs 2009/11 – Lösungen

Die Farbe Lila

1. $8^{23} = 5{,}9 \cdot 10^{20}$

2. $13^{11} \cdot 8^{12} = 1{,}2 \cdot 10^{23}$

3. a) $5! \cdot 19! = 1{,}46 \cdot 10^{19}$ (Rand kann bedeuten linker oder rechter Rand, deshalb mal 2)

   b) $1 \cdot 4! \cdot 19! = 2{,}92 \cdot 10^{18}$ (Oppelt steht ganz am Rand, dann 4mal lila)

   c) $2 \cdot 5! \cdot 18! = 1{,}54 \cdot 10^{18}$ (Oppelt/Lila kann links/recht und umgekehrt stehen also mal 2)

   d) $\binom{24}{5} \cdot \binom{19}{19} = 42504$ (die 5 lila'nen suchen sich aus 24 Plätzen 5 aus)

Der Fall Victor

4. $$\begin{aligned} &p(mind.1\ mal\ anwesend > 99\%\\ &p(kein\ mal\ anwesend) < 1\%\\ &0{,}95^n < 0{,}01 \ \rightarrow n \geq 90 \end{aligned}$$

5. $3^{20} = 3486784401$

Blasenschwächen

6. $\frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{12}{8}} = 14{,}14\%$

7. $$\begin{aligned} &p(mind\ 1.mal\ ohne\ Pinkelpause) \geq 90\%\\ &p(jedes\ mal\ Pinkelpause) \leq 10\%\\ &0{,}98^n \leq 0{,}1 \ \rightarrow n \geq 114 \end{aligned}$$

8. $\frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{18}{6}}{\binom{23}{11}} = 1{,}37\%$

9. a) $B(5; 0{,}8; 5) = 32{,}77\%$

   b) $P(mind\ 1\ daneben) = 1 - P(keiner\ daneben) = 1 - P(alle\ treffen) = 67{,}32\%$

   c) $\sum_{k=4}^{5} B(5; 0{,}8; k) = 1 - F_{0,8}^{5}(3) = 79{,}52\%$

   d) Mindestens einer trifft.

Anweisungen

10. a) $\binom{18}{5} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 771891120$ (zwei 5er- und zwei 4er-Gruppen)

    b) $\binom{17}{4} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 214414200$ (der Italiener muss zu Andrea, dazu noch 4 beliebige)

    c) $2 \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 180180$ (erste 5er-Gruppe festgelegt und bei Andrea oder Julia)

11. a) $B(23; 0{,}4; 23) = 7{,}04 \cdot 10^{-10}$

    b) $B(23; 0{,}4; 6) = 7{,}00\%$

    c) $\sum_{k>8} B(20; 0{,}4; k) = 1 - \sum_{k=0}^{8} B(20; 0{,}4; k) = 40{,}44\%$

    d) $\sum_{k=4}^{10} B(20; 0{,}4; k) = F_{0,4}^{20}(10) - F_{0,4}^{20}(3) = 85{,}65\%$

Das rosa Handy

12. a) $24! = 6{,}20 \cdot 10^{23}$

    b) $\frac{1}{24!} = 1{,}61 \cdot 10^{-24}$

    c) $\frac{23!}{24!} = \frac{1}{24} = 4{,}17\%$

    Das ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dafür, dass nur Herr Oppelt zieht und sein Handy erwischt.

    d)
    $$p(mind.\,1\ mal\ Oppelt - Handy) \geq 90\%$$
    $$p(kein\ mal\ Oppelt - Handy) \leq 10\%$$
    $$\left(\frac{23}{24}\right)^n \leq 0{,}1 \ \rightarrow n \geq 55$$

13. a) $\binom{24}{4} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{18}{5} \cdot \binom{13}{6} \cdot \binom{7}{7} = 2{,}97 \cdot 10^{13}$ (man sucht 4 Plätze für Apple aus usw.)

    b) $\frac{21}{\binom{24}{4}} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$ (Apple kann auf 1 bis 4 liegen, 2 bis 5, …. , 21 bis 24)

    c) $5! = 120$ (Anzahl der Möglichkeiten, 5 Marken untereinander zu vertauschen)

    d) $\frac{\binom{20}{6} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{24}{10}} = 2{,}00\%$

14. a) $\sum_{i=11}^{25} B(25; 0{,}3; i) = 1 - F_{0,3}^{25}(10) = 9{,}78\%$

    (=weniger als 15 kaputt, also höchstens 14 kaputt)

    b) $\sum_{i=0}^{13} B(25; 0{,}7; i) = F_{0,7}^{25}(13) = 4{,}425\%$

    c) Ergebnis a) minus Ergebnis b) ergibt: $p(genau\ 14\ kaputt) = 5{,}355\%$