Untersuchung verknüpfter Funktionen - Lösung

Aufgabe 1:

Berechne die Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = (\sin(x) + 7)^5$

$\boldsymbol{f'(x) = 5 \cdot (\sin(x) + 7)^4 \cdot \cos(x)}$ **(Kettenregel)**

b) $f(x) = (2x^2 + 5)e^{-2x}$

$\boldsymbol{f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2 + 5) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \cdot (4x - 4x^2 - 10)}$

(Produktregel und Kettenregel)

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^{2x} + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot \left(\frac{1 + 4x}{2\sqrt{x}}\right)}$

(Produktregel und Kettenregel)

d) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot \sin(4x^2)$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \cos(4x^2) \cdot 8x = x \cdot \cos(4x^2)}$ **(Kettenregel)**

e) $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x + 1)$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x \cdot \sin(3x + 1) + x^2 \cdot 3 \cdot \cos(3x + 1)}$

(Produktregel und Kettenregel)

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 8x \cdot e^{-0,5x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

a) Gib die Nullstelle von f an.

$\boldsymbol{N(0|0)}$

b) Untersuche das Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$ und gib – falls vorhanden – die Gleichung der waagrechten Asymptote an.

$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = 0}$

$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

waagrechte Asymptote bei $\boldsymbol{y = 0}$

c) Berechne $f'(x)$ und bestimme Lage und Art des Extrempunktes.

Berechnung der 1. Ableitung:

$\boldsymbol{f'(x) = -(4x-8) \cdot e^{-0,5x}}$

Berechnung des Extremwertes:

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2}$

Berechnung der y-Koordinate des Extrempunktes:

$\boldsymbol{f(2) = 8 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = 16 \cdot e^{-1}}$

Berechnung der 2. Ableitung:

$\boldsymbol{f''(x) = (2x-8) \cdot e^{-0,5x}}$

Überprüfen, ob Max oder Min vorliegt (mithilfe der 2. Ableitung oder mithilfe einer Monotonietabelle**):**

$\boldsymbol{f''(2) = -4 \cdot e^{-1}} < 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{Max\ (2|16e^{-1})}$

d) Berechne die Koordinaten des Wendepunktes von G_f.

$\boldsymbol{f''(x) = (2x-8) \cdot e^{-0,5x}}$

Berechnung der x-Koordinate des Wendepunktes:

$\boldsymbol{f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4}$

Überprüfen, ob ein Wendepunkt vorliegt (mithilfe der 3. Ableitung oder mithilfe des Krümmungsverhaltens**):**

$\boldsymbol{f'''(x) = -(x-6) \cdot e^{-0,5x}}$

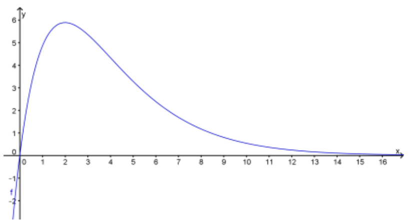
$\boldsymbol{f'''(4) = -(4-6) \cdot e^{-0,5 \cdot 4} = 2 \cdot e^{-2} \neq 0 \quad \Rightarrow WeP}$ **bei** $\boldsymbol{x = 4}$

Berechnung der y-Koordinate des Wendepunktes:

$\boldsymbol{f(4) = 8 \cdot 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 4} = 32 \cdot e^{-2}}$

$\Rightarrow \boldsymbol{WeP(4|32 \cdot e^{-2})}$

e) Skizziere den Graphen unter Verwendung der bisher gewonnen Erkenntnisse.



f) Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = 8 \cdot (-2x-4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.

$$\boldsymbol{F'(x) = 8 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-2) + 8 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-2x-4) \cdot (-0,5) = 8 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-2+x+2)}$$

$$\boldsymbol{= 8 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x = 8x \cdot e^{-0,5x} = f(x)}$$

g) Berechne den Flächeninhalt der oberhalb der x-Achse gelegenen Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt.

$$\boldsymbol{\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (8x \cdot e^{-0,5x})\,dx = \left[8 \cdot (-2x-4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^a}$$

$$\boldsymbol{= 8 \cdot (-2a-4) \cdot e^{-\frac{a}{2}} - 8 \cdot (-2 \cdot 0 - 4) \cdot e^{-\frac{0}{2}}}$$

$$\boldsymbol{= 8 \cdot (-2a-4) \cdot e^{-\frac{a}{2}} - 8 \cdot (-4) \cdot 1 = 8 \cdot (-2a-4) \cdot e^{-\frac{a}{2}} + 32}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \quad \lim_{a\to\infty}\left(8 \cdot \underbrace{(-2a-4)}_{\longrightarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{-\frac{a}{2}}}_{\longrightarrow 0} + 32\right) = 32}$$

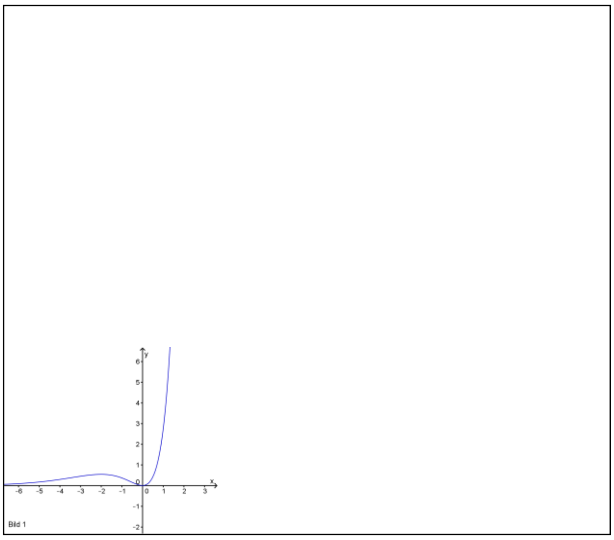
$$\boldsymbol{\Longrightarrow \quad A = 32\ FE}$$

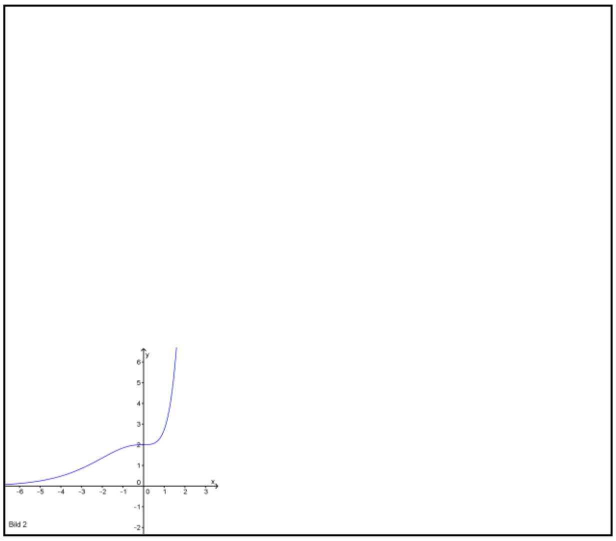
Aufgabe 3:

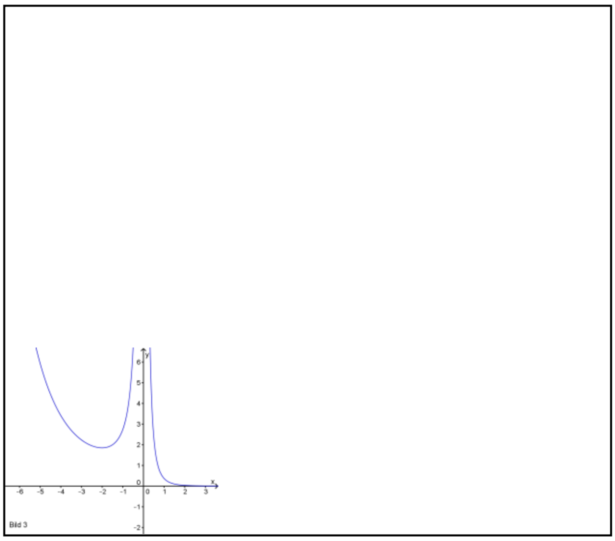
Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot x^2$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

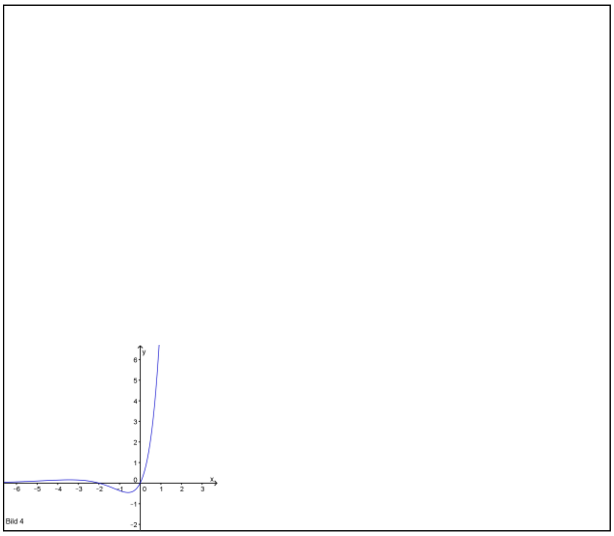
a) Begründe, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

b) Ordne die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründe deine Entscheidung.









a) **f hat nur die Nullstelle $x = 0$. Es kommt also nur Bild 1 infrage.**

b) **Nach Bild 1 hat das Schaubild von f bei $x = -2$ und $x = 0$ die Steigung 0.**

f' hat also Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 0$. Das ist bei Bild 4 der Fall.

Nach Bild 1 gilt: $f(x) \geq 0$. Die Stammfunktion F ist monoton wachsend. Das ist nur bei Bild 2 der Fall.

Die Nullstelle $x = 0$ von f bewirkt bei g eine Definitionslücke. Das ist bei Bild 3 der Fall (vgl. senkrechte Asymptote).