

Exponentielles Wachstum am Beispiel des Wachstums der Weltbevölkerung

Die Weltbevölkerung betrug laut der Statistiken der Vereinten Nationen (UNO) 2,5258 Milliarden Menschen zu Beginn des Jahres 1950 und 20 Jahre später 3,6912 Milliarden.

- a) Berechnen Sie die Weltbevölkerung zu Beginn der Jahre 1951 und 2010, indem Sie innerhalb der 60 Jahre von 1950 bis 2010 ein lineares Wachstum annehmen.

Bevölkerungswachstum geschieht meist nicht linear, sondern exponentiell, das heißt, es nimmt in gleichen Zeiträumen um den gleichen Faktor zu oder anders ausgedrückt, um gleich viel Prozent zu.

- b) Berechnen Sie den prozentualen Anstieg der Weltbevölkerung von 1950 bis 1970. Berechnen Sie nun daraus die Bevölkerung zu Beginn des Jahres 2010 unter der Annahme, dass der prozentuale Anstieg in den nächsten zweimal 20 Jahren bis 2010 der Gleiche ist.

Exponentielles Wachstum kann bekanntlich durch eine Exponentialfunktion der folgenden Form dargestellt werden: $f(t) = c \cdot a^t$

- c) Berechnen Sie aus den Bevölkerungszahlen von 1950 und 1970 die Werte für c und a. t soll dabei für die seit Beginn des Jahres 1950 vergangenen Jahre stehen. Geben Sie den Wachstumsfaktor a für die weiteren Berechnungen auf 5 Dezimalen genau an.

Unter der Annahme, dass diese Exponentialfunktion die wahre Weltbevölkerung gut simuliert, können nun sehr viele Werte berechnet werden:

- d) Berechnen Sie, wie viele Menschen zu Beginn der Jahre 1951 und 2010 lebten. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für 2010 mit denen aus a) und b) und geben Sie je einen Grund für die Abweichung an.
- e) Berechnen Sie, wann die Weltbevölkerung die 3 Milliarden-Marke und wann die 7 Milliardenmarke überschreitet. Geben Sie Ihre Ergebnisse nicht nur auf das Jahr, sondern auf den Monat genau an.

Übrigens gibt die UNO als tatsächlichen Moment, in dem die 7 Milliarden-Marke überschritten wurde, symbolisch den 31.10.2011 an. (Symbolisch, da dies auf den Tag genau nicht festgestellt werden kann.) Die große Abweichung zum in e) berechneten Wert liegt daran, dass das jährliche prozentuale Wachstum der Weltbevölkerung seit etwa 1980 abnimmt. In den letzten Jahren, also um 2010 herum, lag es nur noch bei 1,1%.

Exponentielles Wachstum kann ebenso gut durch eine Exponentialfunktion der folgenden Form dargestellt werden, indem man den Wachstumsfaktor a aus obiger Form durch $k = \ln a$ ersetzt: $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$

- f) Beweisen Sie diese Aussage durch geeignete Termumformungen.
- g) Lösen Sie die Aufgaben d) und e) nun auch mit dieser Form der Exponentialfunktion.
- h) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Weltbevölkerung zu Beginn des Jahres 1970. Erklären Sie, weshalb es nicht überrascht, dass Ihr Ergebnis größer als das der folgenden Rechnung ist: $(3,6912 \text{ Milliarden} - 2,5258 \text{ Milliarden}) : 20 = 58 \text{ Millionen Menschen}$. Berechnen Sie aus Ihrem Ergebnis für die momentane Änderungsrate, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung während des 1.1.1970, also während dieses eines Tages, anstieg.