Musterlösung zum Übungsblatt
Exponentielles Wachstum am Beispiel des Wachstums der Weltbevölkerung

a) Bevölkerung 1951 in Milliarden: 2,5258 + (3,6912 – 2,5258) : 20 = **2,5841**
2010: 2,5258 + (3,6912 – 2,5258) · 3 = **6,022**

b) 3,6912 : 2,5258 = 1,4614 , also **46%**. 3,6912 · 1,4614² = **7,8832** (in Milliarden)

c) **c = 2,5258 Milliarden**, da $f(0) = c \cdot a^0 = c$
3,6912 Milliarden = 2,5258 Milliarden · a^{20} **a =** $\sqrt[20]{\frac{3,6912}{2,5258}}$ = **1,01915**

d) Bevölkerung 1951 in Milliarden: $f(1) = 2,5258 \cdot 1,01915^1$ = **2,5742**
2010: $f(60) = 2,5258 \cdot 1,01915^{60}$ = **7,8829**
Im Jahr 2010 fast 2 Milliarden höher als in Aufgabe a), da exponentielles Wachstum für die Zukunft stets höhere Zahlen prognostiziert als vergleichbarer linearer Anstieg.
Der minimale Unterschied zum Ergebnis aus b) entsteht nur durch das Runden der Zwischenergebnisse.

e) $f(t) = 3$ $2,5258 \cdot 1,01915^t = 3$ $1,01915^t = 3 : 2,5258$ $t = \log_{1,01915}(\frac{3}{2,5258}) = 9,070$
0,07 < 1/12 = 0,84 , also **Januar 1959** die 3 Milliarden-Marke
$\log_{1,01915}(\frac{7}{2,5258}) = 53,738$ 0,738·12 = 8,86 , also **September 2003** die 7 Milliarden-Marke

f) $k = \ln a \Rightarrow e^k = a$
$c \cdot a^t = c \cdot (e^k)^t = c \cdot e^{k \cdot t}$

g) k = ln 1,01915 = 0,018969
Bevölkerung 1951 in Milliarden: $f(1) = 2,5258 \cdot e^{0,018969 \cdot 1}$ = **2,5742**
2010: $f(60) = 2,5258 \cdot e^{0,018969 \cdot 60}$ = **7,8829**
$f(t) = 3$ $2,5258 \cdot e^{0,018969 \cdot t} = 3$ $0,018969 \cdot t = \ln(\frac{3}{2,5258})$ t = 9,070
$0,018969 \cdot t = \ln(\frac{7}{2,5258})$ t = 53,738

h) Berechnung der Ableitung: $f'(t)$ = 2,5258 Milliarden · $e^{0,018969 \cdot t} \cdot 0,0189969$
$f'(20)$ = 0,07002 Milliarden = 70 Millionen
Dies bedeutet, dass um den Beginn des Jahres 1970 herum die Bevölkerungszahl pro Jahr um 70 Millionen Menschen ansteigt. Dieser Anstieg ist logischerweise höher als der durchschnittliche jährliche Anstieg im Zeitraum von 1950 bis 1970, da es im Jahr 1970 bereits mehr Menschen auf der Welt gab als in den 20 Jahren zuvor.
Am 1.1.1970: 70 Millionen : 365 = 0,19 Millionen Menschen