Abstandsbestimmungen - Lösung

Aufgabe 1.

a) $|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{Q} - \vec{P}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{79}$

b) $|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{Q} - \vec{P}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + 12^2 + 9^2} = \sqrt{a^2 + 225}$

Aufgabe 2.

$E_1 : \frac{x_1+2x_2-x_3+4}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 0$

$d(P, E_1) = \left|\frac{1+2\cdot2-3+4}{\sqrt{6}}\right| = \sqrt{6}$

$d(Q, E_1) = \left|\frac{0+2\cdot(-6)-7+4}{\sqrt{6}}\right| = \frac{15}{\sqrt{6}}$

$E_2 : \frac{-x_1-8x_2-26x_3+41}{\sqrt{1^2+(-8)^2+(-26)^2}} = 0$

$d(P, E_2) = \left|\frac{-1-8\cdot2-26\cdot3+41}{\sqrt{741}}\right| = \frac{54}{\sqrt{741}}$

$d(Q, E_2) = \left|\frac{0-8\cdot(-6)-26\cdot7+41}{\sqrt{741}}\right| = \frac{93}{\sqrt{741}}$

Aufgabe 3.

a)
- Lege eine Ebene E folgendermaßen fest: Sie geht durch durch den Punkt (P ist der Aufpunkt) und steht senkrecht auf der Geraden (der Richtungsvektor der Gerade ist der Normalenvektor der Ebene).
- Ermittle dann den Schnittpunkt von Ebene und Gerade g, man erhält den Punkt P_1 auf der Gerade, der P am nächsten ist.
- Bestimme schließlich $\overline{PP_1}$.

b)
- Die Ebene ist $E : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0.$
- Bestimmung des Schnittpunktes von g und E:

  $-(-7 - \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 5 = 0$ liefert $\lambda = -2,5$.

  Dann ist $P_1(-4,5/-2/5,5)$ und
- $\overline{PP_1} = \left|\begin{pmatrix} -5,5 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{146}}{2}$.

Aufgabe 4.

a) Die beiden Ebenen müssen zueinander parallel sein, sonst gibt es eine Schnittgerade (mit zwei Din A4-Blättern veranschaulichen!).

b) Wähle irgendeinen Punkt (z.B. den Aufpunkt) der einen Ebene und bestimme seinen Abstand zur anderen Ebene.

c) Ein Punkt auf der Ebene E_1: Wähle z.B. $x_1 = x_2 = 0$, dann ist $x_3 = 4$, also $P(0/0/4) \in E_1$.

$E_2 : \frac{-2x_1-4x_2+2x_3+9}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+2^2}} = 0$, also $d(P, E_2) = \frac{2\cdot4+9}{\sqrt{24}} = \frac{17\sqrt{6}}{12}$

d) Ein Punkt auf E_1 ist wieder $P(0/0/4)$. Als Ortsvektoren der Aufpunkte der beiden gesuchten Ebenen E_2 und E_3 nehmen wir $\vec{P} \pm 5 \cdot \vec{n}_0$, wobei $\vec{n}_0$ der normierte (d.h. $|\vec{n}_0| = 1$) Normalenvektor von E_1 ist.

Also $\vec{P} \pm 5 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \pm 5 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$

Die Normalenvektoren der Ebenen sind gleich dem von E_1 (sie sollen ja parallel sein), also ergeben sich die Ebenen:

$E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 17/3 \end{pmatrix}\right] = 0$

$E_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}\right] = 0$

Aufgabe 5.

a) Dazu nimmt man irgendeinen Punkt auf g und bestimmt seinen Abstand zu h.

Die Geraden sind parallel, da die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie bei Aufgabe 3: Ebene durch Aufpunkt von h erstellen:

$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor ein Vielfaches der beiden Geraden-Richtungsvektoren}} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = 0$ bzw. $E : 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 21 = 0$,

Schnittpunkt mit der Gerade g:

$2(4 + 4\lambda) + 2(2 + 4\lambda) - (0 - 2\lambda) - 21 = 0$ hat die Lösung $\lambda = \frac{1}{2}$, also (λ einsetzen) $P_1(6/4/-1)$

Der Abstand der Punkte P_1 und $(7/7/7)$ beträgt $\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{74}$.

b) Der Abstand zweier windschiefer Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ lässt sich ermitteln, indem man (z.B.) eine Ebene E erstellt, in der g liegt und die parallel zu h ist (Der Normalenvektor von E ist $\vec{u} \times \vec{v}$, der Aufpunkt ist A). Dann bestimmt man den Abstand von B zu dieser Ebene, dieser ist der Abstand der beiden Geraden.

Im konkreten Beispiel:

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich die Ebene $E : -x_1 + 3x_3 = 0$ (enthält die x_2-Achse!)

Der Abstand des Punktes B von dieser Ebene beträgt $\left|\frac{-2+3\cdot 2}{\sqrt{1+9}}\right| = \frac{4}{\sqrt{10}}$

Aufgabe 6.

Dieser ist einfach der Betrag des letzten Summanden (die anderen fallen raus, da die Koordinaten des Ursprungs alle gleich Null sind), z.B. $E : \frac{x_1+x_2+x_3-7}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 0$, der Abstand des Ursprungs beträgt dann $\left|-\frac{7}{\sqrt{3}}\right| = \frac{7}{\sqrt{3}}$.