Gebrochen-rationale Funktionen – Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph – Lösungen

1. Lösungen zu: Nennen Sie alle Eigenschaften einer gebrochen-rationalen Funktion, die mit Hilfe des Funktionsterms ermittelt werden können und beim Zeichnen des Graphen hilfreich sind.
   - Symmetrieeigenschaften des Graphen (Beginn mit $f(-x) = \ldots$)
   - Nullstellen mit ihrer Vielfachheit
   - Schnittpunkt mit der y-Achse
   - Verhalten von f für $x \to \pm\infty$
   - Verhalten an den Polstellen
   - Gleichungen der Asymptoten

2. Lösungen zu: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{(x^2-9)}$.

   a) $f(-x) = \frac{4}{((-x)^2-9)} = \frac{4}{(x^2-9)} = f(x)$

   $\Longrightarrow$ Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

   b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$; Da der Zähler (4) nie null wird, gibt es keine Nullstellen.

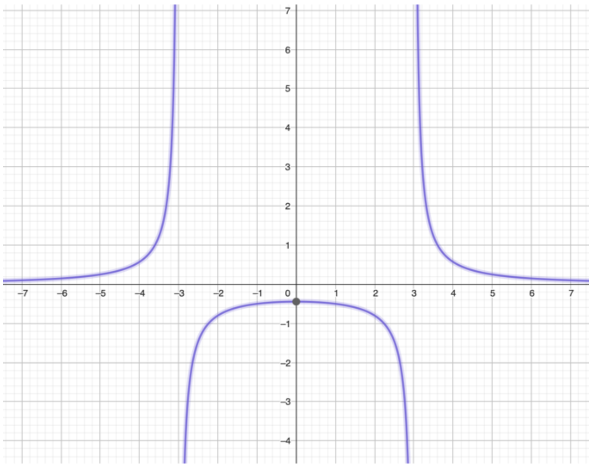
   c) Polstellen $x = -3$ und $x = 3$

   $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \frac{4}{\underset{\to 0^+}{(x^2-9)}} = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{4}{\underset{\to 0^-}{(x^2-9)}} = -\infty$ $\Longrightarrow$ *Polstelle mit VZW*

   $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{4}{\underset{\to 0^-}{(x^2-9)}} = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{4}{\underset{\to 0^+}{(x^2-9)}} = +\infty$ $\Longrightarrow$ *Polstelle mit VZW*

   Da beide Nullstellen $x = -3$ und $x = 3$ im Nenner einfach sind, muss es sich um Polstellen mit VZW handeln.

   d) f geht für $x \to \pm\infty$ gegen Null und der Graph nähert sich damit der x-Achse an, da für immer größer (und kleiner) werdende x der Nenner betragsmäßig immer größer wird, der Zähler jedoch konstant bleibt.

e) 

3. Lösungen zu: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$.

a) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x-2)(-x+2)} = \frac{x^2}{(-1)(-1)(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = f(x)$

$\Longrightarrow$ Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(1-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}\right)} = 1$

Da vor allen x im Zähler als auch im Nenner eine (unsichtbare) 1 steht, muss die waagrechte Asymptote $y = \frac{1}{1} = 1$ sein.

c) waagrechte Asymptote: $y = 1$ (sh. b))

$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = 1 \Leftrightarrow$

$x^2 = (x-2)(x+2) \Leftrightarrow$

$x^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$0 = -4$ ☹ $\Longrightarrow$ kein SP mit waagrechter Asymptote

d) z.B. $f^*(x) = \frac{x^3}{(x-2)(x+2)}$

4. Lösungen zu: Ordnen Sie den Funktionstermen den jeweils passenden Graphen zu und nennen Sie mindestens je zwei Merkmale, anhand derer die Zuordnung deutlich wird.

- $f(x) = \frac{6x}{x^2-9}$ und $j(x) = \frac{6x}{(x-3)(x+3)}$ $\Longrightarrow$ Graph A

  Einfache Nullstelle bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Graph schneidet x-Achse im Ursprung

  $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ $\Longrightarrow$ Polstellen mit VZW bei $x = -3$ und $x = 3$

  Nennergrad > Zählergrad $\Longrightarrow$ waagrechte Asymptote x-Achse

- $g(x) = \frac{6x}{(x-3)^2}$ $\Longrightarrow$ Graph D

  Einfache Nullstelle bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Graph schneidet x-Achse im Ursprung

  Doppelte Nst. im Nenner bei $x = 3$ $\Longrightarrow$ Polstelle ohne VZW

  Nennergrad > Zählergrad $\Longrightarrow$ waagrechte Asymptote x-Achse

- $h(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}$ $\Longrightarrow$ Graph B

  Doppelte Nullstelle bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Graph berührt x-Achse im Ursprung

  $(x-3)(x+3)$ $\Longrightarrow$ Polstellen mit VZW bei $x = -3$ und $x = 3$

  Nennergrad = Zählergrad ; beidesmal 1 vor x $\Longrightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 1$

- $i(x) = \frac{2x}{(x-3)}$ $\Longrightarrow$ Graph C

  Einfache Nullstelle bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Graph schneidet x-Achse im Ursprung

  $(x-3)$ $\Longrightarrow$ Polstelle mit VZW bei $x = -3$

  Nennergrad = Zählergrad ; 2 vor x im Zähler $\Longrightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 2$