Gebrochen-rationale Funktionen – Definitionsmenge und Nullstellen – Lösungen

1. Lösungen zu: Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion *f*.

   a) $2x - 4 = 0 \iff x = 2$

   b) $(x-2)(x+5) = 0 \iff x_1 = 2\,;\ x_2 = -5$

   c) $x^2 + 7 = 0 \implies keine\ Nullstelle, da\ x^2\ immer\ größer\ als\ 0$

   d) $4x + 3 = 0 \iff x = \frac{-3}{4}$

   e) $4x^2 - 8x + 2 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4} \Rightarrow x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,;\ x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   f) $\frac{x-2}{3x} + 2 = 0 \iff x - 2 = -2\cdot3x \iff x + 6x = 2 \iff x = \frac{2}{7}$

2. Lösungen zu: Bestimmen Sie die Definitionslücken von *f* und geben Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten des Graphen an.

   a) $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$; $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$; senkrechte Asymptote: $x = \frac{5}{3}$

   b) $(x-5)(x-2)^3 \iff x_1 = 5\,;\ x_2 = 2\,;\ D = \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$;
   senkrechte Asymptoten: $x = 5$ und $x = 2$

   c) $x^2 + 4 = 0 \implies keine\ Nullstelle$; $D = \mathbb{R}$; keine senkrechten Asymptoten

   d) $2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1} \Rightarrow$
   $x_1 = 3\,;\ x_2 = -1$
   $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$;
   senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 3$

   e) $(x^2 - 3)(x - 5) = 0 \implies x_1 = \sqrt{3}\,;\ x_2 = -\sqrt{3}\,;\ x_3 = 5$;
   $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 5\right\}$;
   senkrechte Asymptoten: $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$ und $x = 5$

   f) $3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$; $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$; senkrechte Asymptote: $x = \frac{1}{3}$

3. Lösungen zu: Formen Sie den Term der Funktion g derart um, sodass er die Darstellung $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ besitzt, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

   a) $f(x) = \frac{x-2}{3x-1} + 2 = \frac{x-2}{3x-1} + \frac{2(3x-1)}{3x-1} = \frac{x-2+6x-2}{3x-1} = \frac{7x-4}{3x-1}$

   b) $f(x) = \frac{x+3}{4x-3} + 5x = \frac{x+3}{4x-3} + \frac{5x(4x-3)}{4x-3} = \frac{x+3+20x^2-15x}{4x-3} = \frac{20x^2-14x+3}{4x-3}$

   c) $f(x) = \frac{x-2}{3x-1} - \frac{1}{x} = \frac{(x-2)x}{(3x-1)x} - \frac{3x-1}{(3x-1)x} = \frac{(x-2)x-(3x-1)}{(3x-1)x} = \frac{x^2-2x-3x+1}{(3x-1)x} = \frac{x^2-5x+1}{3x^2-x}$

4. Lösungen zu: Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die

   - die Nullstellen $x = 3$ und $x = -7$ hat und deren Graph eine senkrechte Asymptote bei $x = 5$ hat

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+7)}{x-5}$$

   - die keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat sowie die Definitionslücke $x = -2$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$$

   - die keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat sowie die doppelte Nullstelle $x = 3$

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x}$$

5. Lösungen zu: Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Definitionsmenge sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse von f an. Geben Sie zudem die Gleichungen aller Asymptoten an und skizzieren Sie den Graphen. Plotten Sie diesen dann mit einem Funktionsplotter und vergleichen Sie mit Ihrer Zeichnung.

   a) $f(x) = \frac{-2}{4x-8} + 1{,}5$

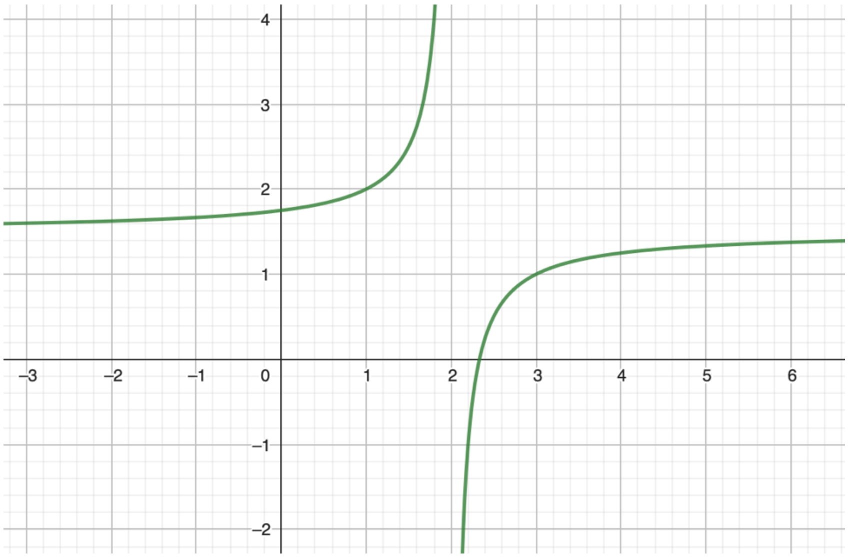
   Nullstellen: $\frac{-2}{4x-8} + 1{,}5 = 0 \iff -2 = -1{,}5\,(4x-8) \iff 2 = 1{,}5\,(4x-8)$

   $\iff 2 = 6x - 12 \iff x = \frac{7}{3} \approx 2{,}3$

   Definitionsmenge: ($4x - 8 = 0 \iff x = 2$) ; $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

   Schnittpunkt mit y-Achse: ($f(0) = \frac{-2}{0-8} + 1{,}5 = 1{,}75$) ; $S(\,0 \,/\, 1{,}75\,)$

   senkrechte Asymptote: $x = \frac{5}{3}$; waagrechte Asymptote: $y = 1{,}5$



b) $f(x) = \frac{3}{3x-6} - 2$

Nullstellen: $\frac{3}{3x-6} - 2 \ = 0 \ \Leftrightarrow \ 3 = \ 2\,(3x-6) \ \Leftrightarrow \ 3 = \ 6x - 12 \Leftrightarrow \ x = 2{,}5$

Definitionsmenge: ($3x - 6 = 0 \ \Leftrightarrow x = 2$) ; $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Schnittpunkt mit y-Achse: ($f(0) = \frac{3}{0-6} - 2 \ = \ -2{,}5$); $S(\,0\,/\,-2{,}5\,)$

senkrechte Asymptote: $x = 2$; waagrechte Asymptote: $y = -2$