Das Vektorprodukt von Vektoren

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k - 12k \\ 18 - 4k \\ 8k - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7k \\ 18 - 4k \\ 8k - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow -7\,k = -21$; $\Rightarrow$ $k = 3$; überprüfen in den beiden übrigen Koordinaten: $18 - 4 \cdot 3 = 6$ und $24 - 15 = 9$ passt.

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{144 + 144 + 36}$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{324} = 9\ (FE)$

b) $A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = 0{,}5 \cdot \sqrt{1 + 4 + 4} \cdot h_c$; $\Rightarrow h_c = 2 \cdot A_D : 3 = 18 : 3 = 6 (LE)$.

4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$;

$\Rightarrow$ Viereck ABCD ist Parallelogramm. $\overline{AB} = \sqrt{36 + 25 + 1} = \sqrt{62} = \overline{AD}$; $\Rightarrow$ Raute.

b) $A_{Raute} = A_{Parallelogramm} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 25 - (-1) \\ -6 - (-30) \\ 6 - (-30) \end{pmatrix}\right| =$

$\left|\begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26^2 + 24^2 + 36^2} = \sqrt{2578} = 14\sqrt{13} (FE)$.

c) Die Pyramide besteht aus zwei gleichen Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche:

$V_{Pyramide} = 2 \cdot V_{Dreieckspyramide} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AS}\right|$

$= \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot |26 \cdot 0{,}5 + 24 \cdot 8 + 36 \cdot 12| = \frac{1}{3} \cdot |637|$

$= \frac{637}{3}\ (VE)$