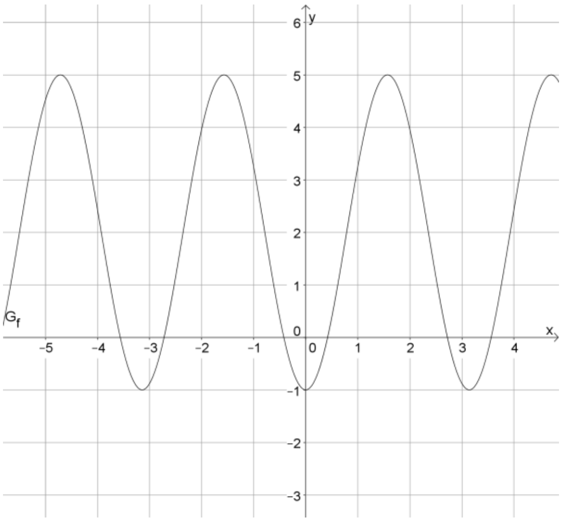
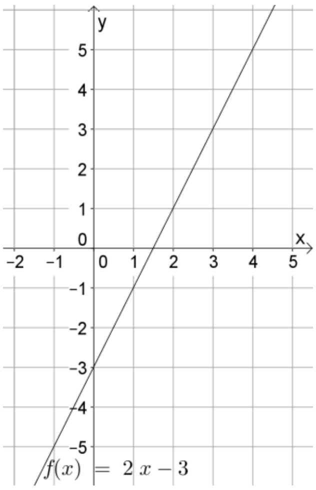
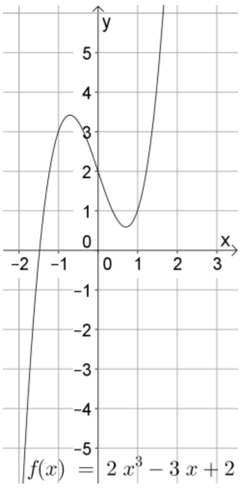
Lösungen

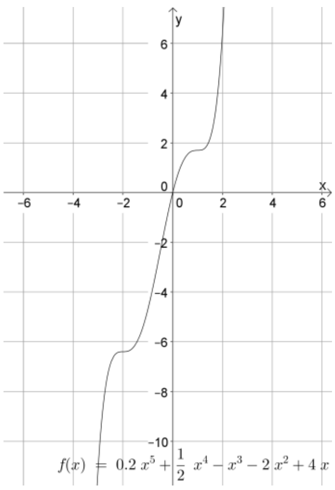
1) f ist streng monoton zunehmend für $x \in \left\{\dots, \left[-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right], \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right], \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right], \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi\right], \dots\right\}$,
also für $x \in \left[z \cdot \pi; z \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right]$ mit $z \in \mathbb{Z}$.
f ist streng monoton abnehmend für $x \in \left\{\dots, \left[-\frac{3}{2}\pi; -\pi\right], \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right], \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right], \dots\right\}$,
also für $x \in \left[z \cdot \pi - \frac{\pi}{2}; z \cdot \pi\right]$ mit $z \in \mathbb{Z}$.



2)

a. 

b. 

c. 

3)

a. Der Graph der **Ableitung** von f ist eine ansteigende Gerade mit einer Nullstelle bei $x = -3$.
→ für $x < -3$ ist $f'(x)$ negativ, für $x > -3$ ist $f'(x)$ positiv.
→ f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; -3]$ und
f ist streng monoton zunehmend für $x \in [-3; \infty[$.

b. Die **Ableitung** von f ist auf ganz $\mathbb{R}$ positiv.
→ f ist streng monoton zunehmend für $x \in \mathbb{R}$.

c. Die **Ableitung** von f ist auf ganz $\mathbb{R}$ nichtnegativ (Quadrat), mit genau einer doppelten Nullstelle bei $x = 2$.
→ f ist streng monoton zunehmend für $x \in \mathbb{R}$.

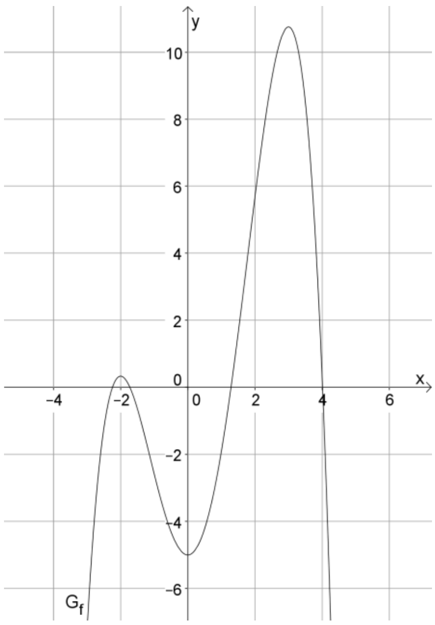
d. $f'(x) = x(x+1)(x-4)^2$ [einfache NST: -1 und 0, doppelte NST: 4]
Monotonietabelle:

Für $x < -1$ gilt:	Für $-1 < x < 0$ gilt:	Für $0 < x < 4$ gilt:	Für $x > 4$ gilt:
$f'(x) > 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f
streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend	streng monoton abnehmend	streng monoton abnehmend
für $x \in]-\infty; -1]$.	für $x \in [-1; 0]$.	für $x \in [0; 4]$.	für $x \in [4; \infty[$.

4)

a. $D_{f,max} = \mathbb{R}; f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5$, $f'(x) = -x^3 + x^2 + 6x = -x \cdot (x^2 - x - 6)$
$= -x \cdot (x+2) \cdot (x-3)$
(einfache) Nullstellen von f' sind damit $-2, 0$ und 3. Betrachtung der Vorzeichen der einzelnen Linearfaktoren und des sich daraus ergebenden VZ des gesamten Terms von f‘:

Für $x < -2$ gilt:	Für $-2 < x < 0$ gilt:	Für $0 < x < 3$ gilt:	Für $x > 3$ gilt:
$f'(x) > 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f	$f'(x) > 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f
streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend
für $x \in]-\infty; -2]$.	für $x \in [-2; -0]$.	für $x \in [0; 3]$.	für $x \in [3; \infty[$.

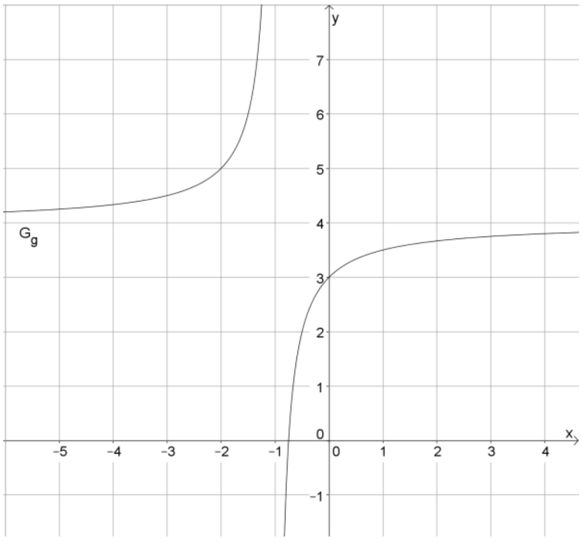


b. $D_{g,max} = \mathbb{R}\backslash[-1]$; $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$, $g'^{(x)} = \frac{(x+1)\cdot 4-(4x+3)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$, $\Rightarrow g(x) > 0$ für alle $x \in D_{g,max}$. Also ist g streng monoton steigend für $x < -1$ und für $x > -1$.
g hat eine Definitionslücke an der Stelle $x = -1$. Verhalten a.d. Def.-lücke:
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{4x+3}{x+1} = \infty$ (Zähler strebt gegen -1, Nenner gegen 0^-)
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{4x+3}{x+1} = -\infty$ (Zähler strebt gegen -1, Nenner gegen 0^+)
Also ist $x = -1$ senkrechte Asymptote von G_g mit VZW +/- .

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{4}{1} = 4,$

ebenso gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \cdots = 4$, also hat G_g die waagrechte Asymptote $y = 4$.



c. $D_{h,max} = \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$;

$h'(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x+2)(x-2)$

Für $x < -2$ gilt:	Für $-2 < x < 0$ gilt:	Für $0 < x < 2$ gilt:	Für $x > 2$ gilt:
$f'(x) < 0$, also ist f	$f'(x) > 0$, also ist f	$f'(x) < 0$, also ist f	$f'(x) > 0$, also ist f
streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend
für $x \in]-\infty; -2]$.	für $x \in [-2; -0]$.	für $x \in [0; 2]$.	für $x \in [2; \infty[$.