Extremwertprobleme - Lösung

1. Materialverbrauch - Quader

Eine Schuhschachtel für Schuhe der Größe 38 (24 cm lang) mit einem Volumen von 4800 cm^3 soll so beschaffen sein, dass bei ihrer Produktion der Materialverbrauch möglichst gering ist. Wie hoch und wie breit muss die Schachtel sein?

Nebenbedingung: V = 4800 cm^3 = $l \cdot b \cdot h = 24cm \cdot b \cdot h$ => $b \cdot h = \frac{4800cm^3}{24cm} = 200cm^2$

=> $b = \frac{200cm^2}{h}$

Zielfunktion: $O = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + h \cdot l) = 2 \cdot (24cm \cdot \frac{200cm^2}{h} + 200cm^2 + h \cdot 24cm)$

$$O(h) = 2 \cdot (\frac{4800cm^3}{h} + 200cm^2 + h \cdot 24cm)$$

$$O'(h) = 2 \cdot (4800cm^3 \cdot (-\frac{1}{h^2}) + 24cm)$$

$$O'(h) = 0 \Leftrightarrow 4800cm^3 \cdot (-\frac{1}{h^2}) + 24cm = 0$$

$$-4800cm^3 + 24cm \cdot h^2 = 0$$

$$h = \sqrt{200}cm \quad => \quad b = \frac{200cm^2}{h} = \sqrt{200}cm \approx 14{,}14cm$$

Man könnte noch zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, und nicht um ein Maximum/TP!

A: Die Schachtel mit dem minimalen Materialverbrauch ist ca. 14,14 cm breit und hoch.

2. Materialverbrauch - Zylinder

Eine Dose für Mais soll ein Volumen von 700 ml haben. Wie hoch muss die Dose sein, damit der Materialverbrauch bei ihrer Produktion minimal ist?

Nebenbedingung: V = 700 ml = $r^2\pi \cdot h$ => $h = \frac{700ml}{r^2\pi} = \frac{700cm^3}{r^2\pi}$

Zielfunktion: $O = 2 \cdot r^2\pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

$$O(r) = 2 \cdot r^2\pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{700cm^3}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{1400cm^3}{r}$$

$$O'(r) = 4r \cdot \pi - \frac{1400cm^3}{r^2}$$

$$O'(r) = 0 \Leftrightarrow 4r \cdot \pi = \frac{1400cm^3}{r^2}$$

$$4r^3 \cdot \pi = 1400cm^3$$

$$r = \sqrt[3]{350cm^3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{700cm^3}{r^2\pi} = \frac{700cm^3}{\sqrt[3]{350}^2 cm^2\pi} \approx 4{,}5cm$$

Man könnte noch zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, und nicht um ein Maximum/TP!

A: Die Dose mit dem minimalen Materialverbrauch muss ca. 4,5 cm hoch sein.

3. Jerry und der Käse

Jerrys Mauseloch kann durch die Funktion $f(x) = -x^2 + 5$ beschrieben werden.

Wie hoch und wie breit ist der Käse-Quader von Jerry, wenn er ein möglichst großes Stück Käse (mit fester Länge l) in sein Mauseloch schieben will?

Gefragt ist: Für welchen x-Wert, mit x > 0, der die halbe Breite des Käsequaders beschreibt, ist das Rechteck mit der Fläche $A = 2x \cdot y$ maximal?

Nebenbedingung: $y = -x^2 + 5$

Zielfunktion: $A = 2x \cdot y$

$$A(x) = 2x \cdot (-x^2 + 5) = -2x^3 + 10x$$

$$A'(x) = -6x^2 + 10$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 10 = 0$$

$$6x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}3 \text{ , } (x > 0) \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{5}{3}}^2 + 5 \approx 3{,}3$$

Man könnte noch zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt, und nicht um ein Minimum/TP!

A: Der Käse ist 2,6 breit und 3,3 hoch, wenn er maximal groß sein soll und zugleich durchs Mauseloch passen soll!

4. Schnell zur Schule

Susi hat verschlafen und will möglichst schnell von zu Hause H zur Schule S. Sie muss dabei die Strasse senkrecht, also im rechten Winkel zu ihrem Verlauf, überqueren. Ansonsten kann sie querfeldein gehen und überlegt jetzt, was wohl der kürzeste Weg ist.
Findest du es heraus? Wo muss sie die Strasse überqueren und wo liegt dann der Punkt U?

Pythagoras:

$$\overline{HU'}^2 = 2^2 + (10-x)^2$$
$$\overline{SU} = 2^2 + x^2$$
$$\overline{UU'} = 2$$

$$f(x) = \sqrt{2^2 + (10-x)^2} + \sqrt{2^2 + x^2} + 2$$
$$f(x) = \sqrt{4 + (10-x)^2} + \sqrt{4 + x^2} + 2$$

Zielfunktion:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+(10-x)^2}} \cdot 2 \cdot (10-x)(-1) + \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}} \cdot 2x$$
$$f'(x) = \frac{-(10-x)\sqrt{4+x^2} + x\sqrt{4+(10-x)^2}}{\sqrt{4+(10-x)^2} \cdot \sqrt{4+x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(10-x)\sqrt{4+x^2} + x\sqrt{4+(10-x)^2} = 0$$

$$(10-x)\sqrt{4+x^2} = x\sqrt{4+(10-x)^2}$$

$$(10-x)^2(4+x^2) = x^2(4+(10-x)^2)$$

$$(x-10)^2(4+x^2) = x^2(4+(10-x)^2)$$

$$(x-10)^2 \cdot 4 = x^2 \cdot 4$$

$$(x-10)^2 = x^2$$

$$x^2 - 20x + 100 = x^2$$

$$-20x + 100 = 0$$

$$x = 5 \;\Rightarrow\; [WU'] = 5$$

Man könnte noch zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, und nicht um ein Minimum/TP!

A: Sie muss die Strasse genau in der Mitte überqueren! Der Punkt U liegt dann genau in der Mitte der Strecke zwischen W und V.