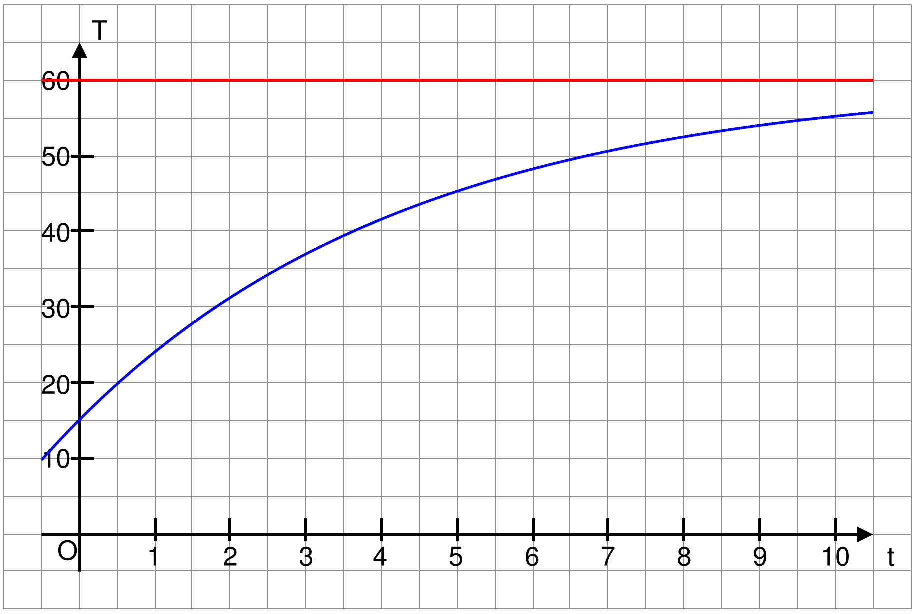
Modellieren von Wachstum – Lösung

1. a)



b) $T(0)$: $15 = s - b \cdot a^0$ → (I) $b = s - 15$

$T(1)$: $24 = s - b \cdot a^1$ → (II) $b \cdot a = s - 24$

$T(2)$: $31{,}2 = s - b \cdot a^2$ → (III) $b \cdot a^2 = s - 31{,}2$

(III)/(II): $a = \frac{s-31{,}2}{s-24}$

(II)/(I): $a = \frac{s-24}{s-15}$

gleichsetzen: $\frac{s-31.2}{s-24} = \frac{s-24}{s-15}$ → $s = 60$

einsetzen: $a = \frac{60-24}{60-15}$ → $a = 0{,}8$

$b = s - 15$ → $b = 45$

Funktion: $\boldsymbol{T(t) = 60 - 45 \cdot 0{,}8^t}$

c) Der Parameter b steht für die anfängliche Temperaturdifferenz, s für die Temperatur im Heizraum und a für die Zerfallskonstante.

2. a) Exponentielles Wachstum: $A(t) = A(0) \cdot a^t$

Mit Start bei 1997: $A(t) = 10000 \cdot 3^t$

b) 1984 → $t = -13$: $A(-13) = 10000 \cdot 3^{-13} \approx 0{,}0063$. Dies entspricht $63m^2$

c) 2012 → $t = 15$: $A(15) = 10000 \cdot 3^{15} \approx 1{,}43 \cdot 10^{11}$. (Das 2,8-fache der Erdoberfläche)

d) $20000 = 10000 \cdot 3^t$

$2 = 3^t$, also $log_3 2 = 0{,}63$

Die Verdoppelungszeit sind 0,63 Jahre, also etwa 230 Tage.

3. a) Die Temperaturdifferenz zur Außentemperatur unterliegt einem exponentiellen Zerfall. Somit handelt es sich um eine Exponentialfunktion, die um den entsprechenden Betrag s nach oben verschoben ist. Nachdem die Temperaturdifferenz dazu addiert werden muss, folgt, dass es sich um eine Summe handelt.

b) $T(5)$: $132{,}3 = s + b \cdot a^5$ → (I) $b \cdot a^5 = 132{,}3 - s$

$T(10)$: $107{,}8 = s + b \cdot a^{10}$ → (II) $b \cdot a^{10} = 107{,}8 - s$

$T(15)$: $88{,}9 = s + b \cdot a^{15}$ → (III) $b \cdot a^{15} = 88{,}9 - s$

(III)/(II): $a^5 = \frac{88{,}9-s}{107{,}8-s}$

(II)/(I): $a^5 = \frac{107{,}8-s}{132{,}2-s}$

gleichsetzen: $\frac{107{,}8-s}{132{,}2-s} = \frac{88{,}9-s}{107{,}8-s}$ → $s = 24{,}0$

einsetzen: $a^5 = \frac{88{,}9-24}{107{,}8-24}$ → $a = 0{,}95$

$b = \frac{132{,}3-s}{a^5}$ → $b = 140{,}0$

Funktion: $\boldsymbol{T(t) = 24 + 140 \cdot 0{,}95^t}$

c) Nach einer halben Stunde: $t = 30$: $\boldsymbol{T(30) = 24 + 140 \cdot 0{,}95^{30}} = 54{,}0$.

Nach einer halben Stunde hat die Pizza noch eine Temperatur von 54° Celsius.

4. a) $\frac{d(2)}{d(1)} = 0{,}61$. $\frac{d(3)}{d(2)} = 0{,}61$. D.h. es handelt sich um einen exponentiellen Zerfall, da der Quotient zweier aufeinander folgender Werte gleich ist.

b) $S(t) = 1 \cdot 0{,}61^t$

c) $0{,}5 \cdot S_0 = S_0 \cdot 0{,}61^t$

$0{,}5 = 0{,}61^t$ → $log_{0{,}61}0{,}5 \approx 1{,}4$

Die Halbwertsdicke von Blei beträgt etwa $1{,}4cm$.

d) $0{,}1 \cdot S_0 = S_0 \cdot 0{,}61^t$

$0{,}1 = 0{,}61^t$ → $log_{0{,}61}0{,}1 \approx 4{,}7$

Die Zehntelwertsdicke von Blei beträgt etwa $4{,}7cm$.