Textaufgaben zu Kreisteilen

1. Miss den Durchmesser eines Eurostücks.
   a) Berechne den Flächeninhalt einer Seite und den Umfang.
   b) Das Eurostück fällt herunter und rollt 6,5 m weit. Gib an, wie oft es sich beim Rollen gedreht hat.

2. Leite eine Gleichung her, mit der man aus dem Umfang eines Kreises direkt den Inhalt berechnen kann. Berechne damit den Inhalt, wenn gilt:
   a) $U = 3{,}345\ m$ b) $U = 40\ 000\ km$

3. Wie lang ist die Seite eines Quadrats, das denselben Inhalt hat, wie ein Kreis mit dem Umfang U …
   a) wenn U = 2m?
   b) Leite die Formel allgemein her. (Gehe dazu davon aus, dass der Umfang U des Kreises gegeben sei und die Seitenlänge des Quadrates a ist. Gib eine Gleichung für a in Abhängigkeit von U an.)

4. Berechne den äußeren Radius eines Kreisrings, wenn der innere Kreis den Umfang $U_i = 23{,}4\ cm$ hat und der Flächeninhalt des Kreisrings $A = 35\ cm^2$ beträgt.

5. Der Umfang der Erde betrage exakt 40000 km. Um die Erde wird ein Seil mit der Länge 40000 km gespannt. Schätze, um wie viel (Kilo)Meter man das Seil verlängern muss, wenn man überall aufrecht (2 m Höhe) unter dem Seil durchgehen will. Berechne anschließend.

6. Berechne den Radius eines Kreises, dessen Inhalt gleich der Summe der Inhalte zweier Kreise mit den Radien $r_1 = 3{,}5\ cm$ und $r_2 = 6\ cm$ ist. Erkläre, warum man die beiden Radien nicht einfach addieren kann.

7. Um ein kreisförmiges Wasserbecken mit der Fläche $123\ m^2$ soll ein $1{,}35\ m$ breiter Spazierweg angelegt werden. Berechne die Kosten, wenn 1 m^2 48,20 € kostet.

8. Auf einem Kreis mit Fläche $80\ \text{cm}^2$ wird ein Kreisbogen der Länge 4 cm markiert. Zeige, dass der zugehörige Mittelpunktswinkel knapp 6° beträgt.

9. Eine beschreibbare CD-ROM (Durchmesser 12 cm) wird mit Silber beschichtet. Berechne die Kosten der Beschichtung, wenn in der Mitte ein runder Bereich von 3,5 cm Durchmesser nicht beschichtet wird und der Silberpreis bei $2{,}00\ €/m^2$ liegt?

10. Ein Autoreifen hat einen Durchmesser von 60 cm. Welchen Radius muss eine kreisrunde Radkappe haben, wenn durch diese 35% des Rades abgedeckt werden sollen?

Textaufgaben zu Kreisteilen - Lösungen

1. Maße eines 1-Eurostücks:
   Durchmesser $d = 2{,}3\ cm = 23\ mm$ und Radius $r = 11{,}5\ mm$
   a) Umfang: $U_{Euro} = 2\pi r = \pi \cdot d = \pi \cdot 23\ mm \approx 72{,}3\ mm$
      Flächeninhalt: $A_{Euro} = \pi r^2 = \pi \cdot (11{,}5\ mm)^2 \approx 415\ mm^2$
   b) Gesucht ist die Anzahl k der Umdrehungen des Eurostücks.
      Abrolllänge: $6{,}5\ m = 6500\ mm = k \cdot U_{Euro}$

$$k = \frac{6500\ mm}{U_{Euro}} = \frac{6500\ mm}{72{,}3\ mm} \approx 90$$

2. Gleichung, mit der man aus dem Umfang eines Kreises den Inhalt berechnen kann:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r^2 = \frac{1}{2} r \cdot \underbrace{2\pi r}_{U_{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot U_{Kreis} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_{Kreis}}{2\pi} \cdot U_{Kreis}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot (U_{Kreis})^2$$

   a) $\mathrm{U} = 3{,}345\ \mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot (3{,}345\ \mathrm{m})^2 \approx 0{,}89\ \mathrm{m}^2$
   b) $\mathrm{U} = 40\,000\ \mathrm{km} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot (40\,000\ \mathrm{km})^2 \approx 127\,323\,954\ \mathrm{km}^2$

3. Seitenlänge des Quadrats, das denselben Inhalt hat wie ein Kreis
   a) mit Umfang $U = 2\ m$:

$$A_{Kreis} = \frac{1}{4\pi} \cdot (2\ m)^2 \approx 0{,}32\ m^2$$

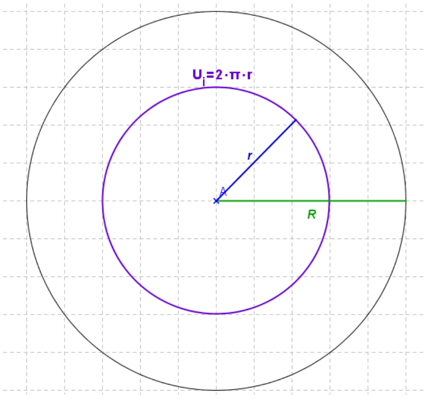
$$0{,}32\ m^2 = A_{Quadrat} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{0{,}32\ m^2} \approx 0{,}57\ m$$

   b) mit Umfang U (allgemeine Formel):
      gegeben: Umfang U
      gesucht: Seitenlänge a des Quadrates

$$a = \sqrt{A_{Quadrat}} = \sqrt{A_{Kreis}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot (U_{Kreis})^2}$$ vgl. Aufgabe 2

$$= \frac{U_{Kreis}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

4. Skizze des Kreisrings



gegeben: Umfang des inneren Kreises $U_i = 23{,}4\ cm$

Flächeninhalt des Kreisrings $A = 35\ cm^2$

gesucht: äußere Radius R eines Kreisrings

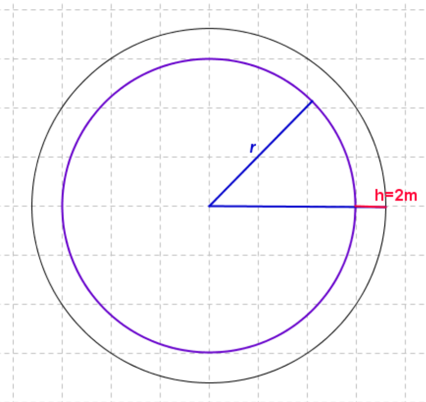
$A = A_{außen} - A_{innen} = 35\ cm^2$

mit $A_{innen} = \frac{1}{4\pi} \cdot (U_i)^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot (23{,}4\ cm)^2 \approx 43\ cm^2$

$A_{außen} = A + A_{innen} = 35\ cm^2 + 43\ cm^2 = 78\ cm^2$ und $A_{außen} = \pi R^2$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{A_{außen}}{\pi}} = \sqrt{\frac{78\ cm^2}{\pi}} \approx 5\ cm$

5. Skizze:



gegeben: Umfang der Erde $U_{Erde} = 40\ 000\ km$

Abstand zwischen Erde und Seil $h = 2\ m$

gesucht: Verlängerung des Seils l

$U_{Seil} = 2\pi(r + h)$

mit Erdradius $r = \frac{U_{Erde}}{2\pi} = \frac{40\ 000\ km}{2\pi} \approx 6\ 366{,}198\ km$

und Abstand $h = 2\ m = 0{,}002\ km$

$U_{Seil} = 2\pi \cdot (6\ 366{,}198\ km + 0{,}002\ km) = 2\pi \cdot 6366{,}2\ km \approx 40\ 000{,}014\ km$

$U_{Seil} = U_{Erde} + l$

$\Rightarrow l = U_{Seil} - U_{Erde} = 40\ 000{,}014\ km - 40\ 000\ km = 0{,}014\ km = 14m$

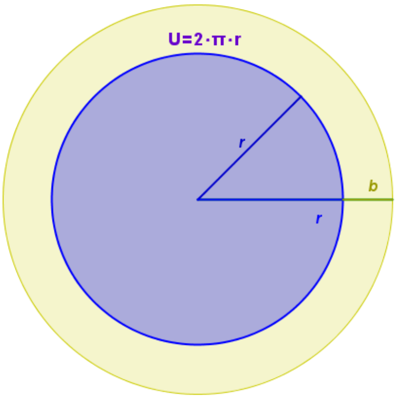
6. Sei A_i der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r_i.

$A_{Kreis} = A_1 + A_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2) = \pi \cdot [(3{,}5\ cm)^2 + (6\ cm)^2]$

$= \pi \cdot 48{,}25\ cm^2 \approx 151{,}58\ cm^2$

$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 \ \Rightarrow\ r = \sqrt{\frac{A_{Kreis}}{\pi}} = \sqrt{\frac{151{,}58\ cm^2}{\pi}} \approx 48{,}25\ cm$

7. Skizze zum Spazierweg um das Wasserbecken



gegeben: kreisförmiges Wasserbecken mit $A = 123\ m^2$

Spazierweg der Breite $b = 1{,}35\ m$

Quadratmeter-Preis für Pflaster: 48,20 €

gesucht: Kosten für den Spazierweg

Radius des Wasserbeckens:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = 123\ m^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\frac{A_{Kreis}}{\pi}} = \sqrt{\frac{123\ m^2}{\pi}} \approx 6{,}26\ m$$

Flächeninhalt des Kreisrings:

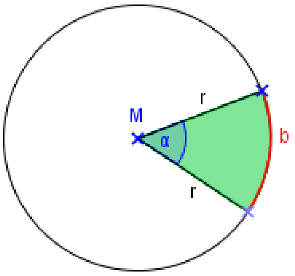
$$A = A_{außen} - A_{innen} = \pi \cdot (r+b)^2 - \pi \cdot r^2$$

$$= \pi \cdot (6{,}26\ m + 1{,}35\ m)^2 - \pi \cdot (6{,}26\ m)^2 \approx 58{,}82\ \mathrm{m}^2$$

Kosten für den Spazierweg:

$$K = A \cdot \frac{48{,}20\ €}{1\ m^2} = 58{,}82\ m^2 \cdot \frac{48{,}20\ €}{1\ m^2} \approx 2835{,}12\ €$$

8. Mittelpunktswinkel eines Kreissektors:



gegeben: Flächeninhalt eines Kreises $A_{Kreis} = 80\ cm^2$

Länge des Kreisbogens $b = 4\ cm$

gesucht: Größe des Mittelpunktswinkels α

Länge des Radius:

$$A_{Sektor} = \frac{1}{2} b \cdot r \Rightarrow r = 2 \cdot \frac{A_{Sektor}}{b} = 2 \cdot \frac{80\ cm^2}{4\ cm} = 2 \cdot 20\ cm = 40\ cm$$

Größe des Mittelpunktswinkels (α_{RAD} in Bogenmaß bzw. α_{DEG} in Gradmaß):

$$\alpha_{RAD} = \frac{b}{r} = \frac{4\ cm}{40\ cm} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$b = \frac{\alpha_{DEG}}{360°} \cdot u = \frac{\alpha_{DEG}}{360°} \cdot 2\pi r \Rightarrow \alpha_{DEG} = \frac{360° \cdot b}{2\pi r} = \frac{360° \cdot 4\ cm}{2\pi \cdot 40\ cm} = 5{,}73°$$

9. Eine Skizze eines Kreisrings findet sich z.B. bei der Lösung von Aufgabe 4.

gegeben: Durchmesser der CD-ROM $d_{außen} = 12\ cm$

Durchmesser des unbeschichteten Kreises $d_{innen} = 3{,}5\ cm$

Silberpreis $2{,}00\ €/m^2$

gesucht: Kosten der Silber-Beschichtung

Flächeninhalt des beschichteten Kreisrings:

$$\mathrm{A_{Kreisring}} = \mathrm{A_{außen}} - \mathrm{A_{innen}} = \pi \cdot \left(\frac{\mathrm{d_{außen}}}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{\mathrm{d_{innen}}}{2}\right)^2$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{12\ cm}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{3{,}5\ cm}{2}\right)^2 \approx 103{,}48\ cm^2$$

Kosten für die Beschichtung:

$$K = A \cdot \frac{2{,}00\ €}{1\ m^2} = A \cdot \frac{2{,}00\ €}{10\ 000\ cm^2} = 103{,}48\ cm^2 \cdot \frac{2{,}00\ €}{10\ 000\ cm^2} \approx 0{,}02\ € = 2\ ct$$

10. gegeben: Durchmesser eines Autoreifens $d = 60\ cm$

gesucht: Radius einer kreisrunden Radkappe, die 35% des Rades abdeckt

Flächeninhalt des Autoreifens:

$$A_{Radkappe} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{60\ cm}{2}\right)^2 = \pi \cdot (30\ cm)^2 \approx 2827{,}42\ cm^2$$

Der Anteil des abgedeckten Autoreifens entspricht dem Flächeninhalt der Radkappe.

$$A_{Radkappe} = 35\ \%\ von\ 2827{,}42\ cm^2 = 35\ \% \cdot 2827{,}42\ cm^2$$

$$= 0{,}35 \cdot 2827{,}42\ cm^2 \approx 989{,}60\ cm^2$$

Radius der kreisrunden Radkappe:

$$A_{Radkappe} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_{Radkappe}}{\pi}} = \sqrt{\frac{989{,}60\ cm^2}{\pi}} \approx 17{,}75\ cm$$