Textaufgaben zu Kreisteilen - Lösungen

1. Maße eines 1-Eurostücks:
   Durchmesser $d = 2{,}3\ cm = 23\ mm$ und Radius $r = 11{,}5\ mm$
   a) Umfang: $U_{Euro} = 2\pi r = \pi \cdot d = \pi \cdot 23\ mm \approx 72{,}3\ mm$

      Flächeninhalt: $A_{Euro} = \pi r^2 = \pi \cdot (11{,}5\ mm)^2 \approx 415\ mm^2$

   b) Gesucht ist die Anzahl k der Umdrehungen des Eurostücks.

      Abrolllänge: $6{,}5\ m = 6500\ mm = k \cdot U_{Euro}$

$$k = \frac{6500\ mm}{U_{Euro}} = \frac{6500\ mm}{72{,}3\ mm} \approx 90$$

2. Gleichung, mit der man aus dem Umfang eines Kreises den Inhalt berechnen kann:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r^2 = \frac{1}{2} r \cdot \underbrace{2\pi r}_{U_{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot U_{Kreis} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_{Kreis}}{2\pi} \cdot U_{Kreis}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot (U_{Kreis})^2$$

   a) $\mathrm{U} = 3{,}345\ \mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot (3{,}345\ \mathrm{m})^2 \approx 0{,}89\ \mathrm{m}^2$

   b) $\mathrm{U} = 40\,000\ \mathrm{km} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot (40\,000\ \mathrm{km})^2 \approx 127\,323\,954\ \mathrm{km}^2$

3. Seitenlänge des Quadrats, das denselben Inhalt hat wie ein Kreis
   a) mit Umfang $U = 2\ m$:

$$A_{Kreis} = \frac{1}{4\pi} \cdot (2\ m)^2 \approx 0{,}32\ m^2$$

$$0{,}32\ m^2 = A_{Quadrat} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{0{,}32\ m^2} \approx 0{,}57\ m$$

   b) mit Umfang U (allgemeine Formel):

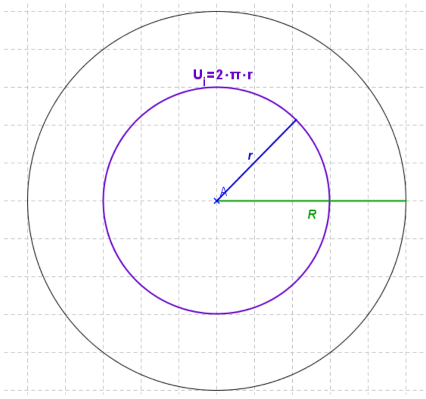
      gegeben: Umfang U

      gesucht: Seitenlänge a des Quadrates

$$a = \sqrt{A_{Quadrat}} = \sqrt{A_{Kreis}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot (U_{Kreis})^2} \qquad \text{vgl. Aufgabe 2}$$

$$= \frac{U_{Kreis}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

4. Skizze des Kreisrings



gegeben: Umfang des inneren Kreises $U_i = 23{,}4\ cm$

Flächeninhalt des Kreisrings $A = 35\ cm^2$

gesucht: äußere Radius R eines Kreisrings

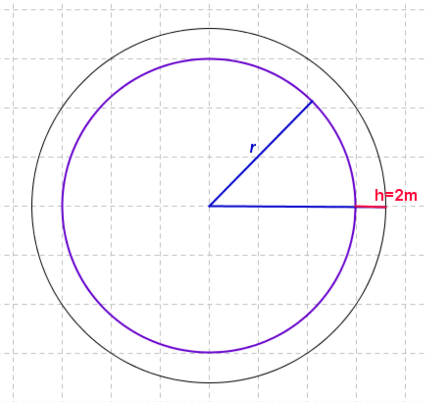
$A = A_{außen} - A_{innen} = 35\ cm^2$

mit $A_{innen} = \frac{1}{4\pi} \cdot (U_i)^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot (23{,}4\ cm)^2 \approx 43\ cm^2$

$A_{außen} = A + A_{innen} = 35\ cm^2 + 43\ cm^2 = 78\ cm^2$ und $A_{außen} = \pi R^2$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{A_{außen}}{\pi}} = \sqrt{\frac{78\ cm^2}{\pi}} \approx 5\ cm$

5. Skizze:



gegeben: Umfang der Erde $U_{Erde} = 40\ 000\ km$

Abstand zwischen Erde und Seil $h = 2\ m$

gesucht: Verlängerung des Seils l

$U_{Seil} = 2\pi(r + h)$

mit Erdradius $r = \frac{U_{Erde}}{2\pi} = \frac{40\ 000\ km}{2\pi} \approx 6\ 366{,}198\ km$

und Abstand $h = 2\ m = 0{,}002\ km$

$U_{Seil} = 2\pi \cdot (6\ 366{,}198\ km + 0{,}002\ km) = 2\pi \cdot 6366{,}2\ km \approx 40\ 000{,}014\ km$

$U_{Seil} = U_{Erde} + l$

$\Rightarrow l = U_{Seil} - U_{Erde} = 40\ 000{,}014\ km - 40\ 000\ km = 0{,}014\ km = 14m$

6. Sei A_i der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r_i.

$A_{Kreis} = A_1 + A_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2) = \pi \cdot [(3{,}5\ cm)^2 + (6\ cm)^2]$

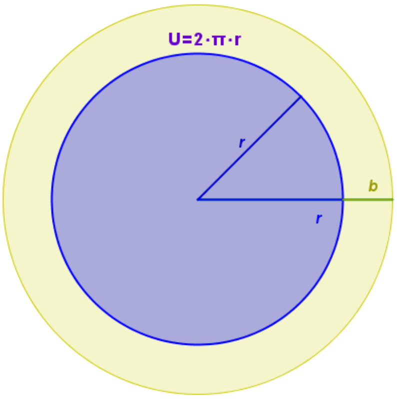
$\pi \cdot x^2 = \pi \cdot [(3{,}5\ cm)^2 + (6\ cm)^2] \quad |:\pi$

$x^2 = (3{,}5\ cm)^2 + (6\ cm)^2$

$x = \sqrt{(3{,}5\ cm)^2 + (6\ cm)^2} \approx 6{,}95\ cm$

Die Fläche steigt nicht proprtional zum Radius, deshalb kann man die Radien nicht einfach addieren.

7. Skizze zum Spazierweg um das Wasserbecken



gegeben: kreisförmiges Wasserbecken mit $A = 123\ m^2$

Spazierweg der Breite $b = 1{,}35\ m$

Quadratmeter-Preis für Pflaster: 48,20 €

gesucht: Kosten für den Spazierweg

Radius des Wasserbeckens:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = 123\ m^2 \ \Rightarrow\ r = \sqrt{\frac{A_{Kreis}}{\pi}} = \sqrt{\frac{123\ m^2}{\pi}} \approx 6{,}26\ m$$

Flächeninhalt des Kreisrings:

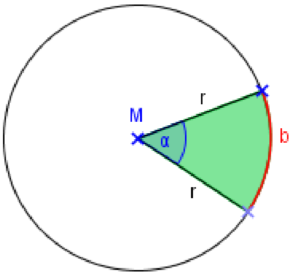
$$A = A_{außen} - A_{innen} = \pi \cdot (r+b)^2 - \pi \cdot r^2$$

$$= \pi \cdot (6{,}26\ m + 1{,}35\ m)^2 - \pi \cdot (6{,}26\ m)^2 \approx 58{,}82\ \mathrm{m}^2$$

Kosten für den Spazierweg:

$$K = A \cdot \frac{48{,}20\ €}{1\ m^2} = 58{,}82\ m^2 \cdot \frac{48{,}20\ €}{1\ m^2} \approx 2835{,}12\ €$$

8. Mittelpunktswinkel eines Kreissektors:



gegeben: Flächeninhalt eines Kreises $A_{Kreis} = 80\ cm^2$

Länge des Kreisbogens $b = 4\ cm$

gesucht: Größe des Mittelpunktswinkels α

Länge des Radius:

$$A_{Sektor} = \frac{1}{2} b \cdot r \Rightarrow r = 2 \cdot \frac{A_{Sektor}}{b} = 2 \cdot \frac{80\ cm^2}{4\ cm} = 2 \cdot 20\ cm = 40\ cm$$

Größe des Mittelpunktswinkels (α_{RAD} in Bogenmaß bzw. α_{DEG} in Gradmaß):

$$\alpha_{RAD} = \frac{b}{r} = \frac{4\ cm}{40\ cm} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$b = \frac{\alpha_{DEG}}{360°} \cdot u = \frac{\alpha_{DEG}}{360°} \cdot 2\pi r \Rightarrow \alpha_{DEG} = \frac{360° \cdot b}{2\pi r} = \frac{360° \cdot 4\ cm}{2\pi \cdot 40\ cm} = 5{,}73°$$

9. Eine Skizze eines Kreisrings findet sich z.B. bei der Lösung von Aufgabe 4.

gegeben: Durchmesser der CD-ROM $d_{außen} = 12\ cm$

Durchmesser des unbeschichteten Kreises $d_{innen} = 3{,}5\ cm$

Silberpreis $2{,}00\ €/m^2$

gesucht: Kosten der Silber-Beschichtung

Flächeninhalt des beschichteten Kreisrings:

$$\mathrm{A_{Kreisring}} = \mathrm{A_{außen}} - \mathrm{A_{innen}} = \pi \cdot \left(\frac{\mathrm{d_{außen}}}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{\mathrm{d_{innen}}}{2}\right)^2$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{12\ cm}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{3{,}5\ cm}{2}\right)^2 \approx 103{,}48\ cm^2$$

Kosten für die Beschichtung:

$$K = A \cdot \frac{2{,}00\ €}{1\ m^2} = A \cdot \frac{2{,}00\ €}{10\ 000\ cm^2} = 103{,}48\ cm^2 \cdot \frac{2{,}00\ €}{10\ 000\ cm^2} \approx 0{,}02\ € = 2\ ct$$

10. gegeben: Durchmesser eines Autoreifens $d = 60\ cm$

gesucht: Radius einer kreisrunden Radkappe, die 35% des Rades abdeckt

Flächeninhalt des Autoreifens:

$$A_{Radkappe} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{60\ cm}{2}\right)^2 = \pi \cdot (30\ cm)^2 \approx 2827{,}42\ cm^2$$

Der Anteil des abgedeckten Autoreifens entspricht dem Flächeninhalt der Radkappe.

$$A_{Radkappe} = 35\ \%\ von\ 2827{,}42\ cm^2 = 35\ \% \cdot 2827{,}42\ cm^2$$

$$= 0{,}35 \cdot 2827{,}42\ cm^2 \approx 989{,}60\ cm^2$$

Radius der kreisrunden Radkappe:

$$A_{Radkappe} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_{Radkappe}}{\pi}} = \sqrt{\frac{989{,}60\ cm^2}{\pi}} \approx 17{,}75\ cm$$