Anwendungen und Modellierungen zur Exponentialfunktion - Lösungen

1.

a) Ein Würfel wird bei jedem Wurf mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ aussortiert, d.h. durchschnittlich bleiben $\frac{5}{6}$ der Würfel für den nächsten Wurf erhalten. Die relative Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte ist also konstant. Es liegt exponentielles Wachstum (Zerfall) mit Wachstumsfaktor $\frac{5}{6}$ und Anfangswert 100 vor, $f(n) = 100 \cdot \frac{5}{6}^n$, mit n: Anzahl der Würfe

b) $f(10) = 100 \cdot \frac{5}{6}^{10} \approx 16$, Es wären ca. 16 Würfel übrig.

c) Die tatsächliche Anzahl wird sehr wahrscheinlich von dieser Zahl abweichen, da der Wachstumsfaktor $\frac{5}{6}$ nur bei einer großen Anzahl von Würfeln gilt (Gesetz der großen Zahlen). Außerdem sind Würfelanzahlen ganzzahlig, aber nicht sämtlich durch 6 teilbar, es können also meist gar nicht $\frac{1}{6}$ aller Würfel aussortiert werden.

d) Table-Modus des TR verwenden ($f(x) = 100 \cdot \frac{5}{6}^x$, Start 0, End 28, Step 1). Nach 25 Würfen ist nur noch 1 Würfel übrig ist. Aus den unter c) genannten Gründen versagt die Modellierung aber schon vorher, da nach 16 Würfen nur noch ca. 5 Würfel übrig sind und alle folgenden Würfelanzahlen nicht mehr durch 6 teilbar sind. Spätestens nach 16 Würfen versagt das Modell also und liefert nur noch grobe Näherungswerte.

2.

a) $f(x) = 20\,m^2 \cdot 1{,}3^x$, mit x: Anzahl der Wochen nach Anfangszeitpunkt.

b) $f(8) \approx 163{,}1\,m^2$. Nach 8 Wochen sind ca. 163,1 m² bedeckt.

c) $7{,}2\,ha = 7{,}2 \cdot 10^4\,m^2$. 1.Lösungsmögl.: Lösen der zugehörigen Exponentialgleichung
$f(x) = 7{,}2 \cdot 10^4\,m^2 \Leftrightarrow\ 20\,m^2 \cdot 1{,}3^x = 7{,}2 \cdot 10^4\,m^2 \Leftrightarrow\ 1{,}3^x = 3{,}6 \cdot 10^3$

$$x = \log_{1,3} 3{,}6 \cdot 10^3 \approx 31{,}2$$

Nach 31,2 Wochen ist der See zugewachsen. 2.Lösungsmögl.: Tabelle von f(x) ausgeben lassen und zu y-Wert $7{,}2 \cdot 10^4$ den zugehörigen x-Wert ablesen.

d) Das Wachstum der Pflanze wird durch knappen Lebensraum begrenzt. Ist also die Seeoberfläche schon weitgehend bedeckt, so ist ein exponentielles Wachstum unrealistisch. Die tatsächliche Wachstumsrate wird kleiner sein, als im exponentiellen Modell angenommen, bei kompletter Bedeckung erreicht sie Null.

3.

a) Bei Erhöhung des x-Wertes um 10 erhöht sich der y-Wert jeweils um 60. Es liegt lineares Wachstum vor. Der Zusammenhang ist nicht proportional, da der Anfangswert ungleich Null ist. $f_a(x) = 500 + 6x$

b) Der Quotient von Funktionswerten zu x-Werten mit Differenz 2 ist konstant und beträgt ca. 1,21. Ebenso ist $f(8) = 1{,}21 \cdot 1{,}21 \cdot f(4)$, also ist auch hier der Wachstumsfaktor konstant. $f_b(x) = 38{,}2 \cdot 1{,}21^{\frac{x}{2}}$ oder $f(x) = 38{,}2 \cdot \sqrt{1{,}21}^x$

c) Es liegt ein konstantes absolutes Wachstum vor (je Erhöhung von x um 3 erhöhen sich die y-Werte um 19,5) → $lineares\ Wachstum$, die Steigung beträgt also $\frac{19,5}{3} = 6,5$, berechne $f(0)$: $\quad 91 - 14 \cdot 6,5 = 0$, es liegt sogar eine Proportionalität vor: $f(x) = 6,5x$.

d) Konstanter Wachstumsfaktor $\sqrt{\frac{3535,5}{5000}} = \sqrt{0,7071} \approx 0,841$ zwischen x-Werten mit Differenz $10^4 \rightarrow exponentieller\ Zerfall,\ \ f(x) = N_0 \cdot 0,841^x$, mit x in 10000. Berechne Anfangswert N_0: $5000 : 0,841 \approx 5946 \ \rightarrow\ f(x) = 5946 \cdot 0,841^x$.

4.

a) Obergrenze: 10^7, Nehme an die Anzahl der noch im Jahr x vorhandenen potentiellen Käufer nimmt exponentiell ab. Modelliere: $f(x) = 10^7 - 10^7 \cdot a^x = 10^7 \cdot (1 - a^x)$, mit x in Jahren. Lese ab: $f(0) \approx 0, f(10) \approx 8950000$, Bestimme den Wachstumsfaktor der zuückgehenden Anzahl noch potentieller Käufer innerhalb der ersten 10 Jahre:

$10^7 - f(10) = 10^7 - 8\,950\,000 \approx 1\,050\,000,\ \ \sqrt[10]{\frac{10^7 - f(10)}{10^7}} \approx 0,80,$
$f(x) \approx 10^7 - 10^7 \cdot 0,80^x = 10^7 \cdot (1 - 0,80^x)$

b) 10^7 ist die Obergrenze der insgesamt verkaufbaren Telefone. Die Anzahl der „Neukäufer" nimmt jährlich um $1000\% - 80\% = 20\%$ ab oder: Die Anzahl der Neukäufer im nächsten Jahr beträgt 80% der Neukäufer im letzten Jahr .

c) $f\left(\frac{5}{12}\right) \approx 8,9 \cdot 10^5$, $\quad f(20) \approx 9,9 \cdot 10^6$, Nach 20 Jahren ist die Obergrenze der Telefonverkäufe fast erreicht.