Aufgaben zur Exponentialfunktion – Lösung

1.

Für G_f: $f(x) = b \cdot a^x$

A(1/1) ; B(3/4)

$I.\quad 1 = b \cdot a^1$
$II.\quad 4 = b \cdot a^3$

$\frac{II}{I}\quad 4 = \frac{b \cdot a^3}{b \cdot a^1}$

$4 = a^2 \quad \rightarrow \quad a = 2$

$a \text{ in } I \text{ oder } II$

$1 = b \cdot 2 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

Für G_g: $g(x) = b \cdot a^x$

A(0/-3) ; B(1/-2)

$I.\quad -3 = b \cdot a^0 \rightarrow b = -3$

$II.\quad -2 = b \cdot a^1$

$-2 = -3 \cdot a^1 \rightarrow a = \frac{2}{3}$

$\Longrightarrow g(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Für G_h: $h(x) = b \cdot a^x$

A(0/2) ; B(1/5)

$I.\quad 2 = b \cdot a^0 \rightarrow b = 2$
$II.\quad 5 = b \cdot a^1$

$5 = 2 \cdot a^1 \rightarrow a = \frac{5}{2}$

$\Longrightarrow h(x) = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$

2.

a) $y = b \cdot a^x$

$I.\quad 360 = b \cdot a^2$
$II.\quad 0{,}045 = b \cdot a^{-1}$

$\frac{II}{I}\quad \frac{1}{8000} = a^{-3} \rightarrow a = 20$

$a \text{ in } I \text{ oder } II$

$360 = b \cdot 20^2 \quad \rightarrow b = \frac{9}{10}$

b) $y = b \cdot a^x$

$I.\quad -\frac{81}{64} = b \cdot a^4$

$II.\quad -\frac{256}{27} = b \cdot a^{-3}$

$\frac{II}{I}\quad \frac{-\frac{256}{27}}{-\frac{81}{64}} = a^{-7} \quad \rightarrow a = \frac{3}{4}$

$a \text{ in } I \text{ oder } II$

$-\frac{256}{27} = b \cdot (\frac{3}{4})^{-3} \quad \rightarrow b = -4$

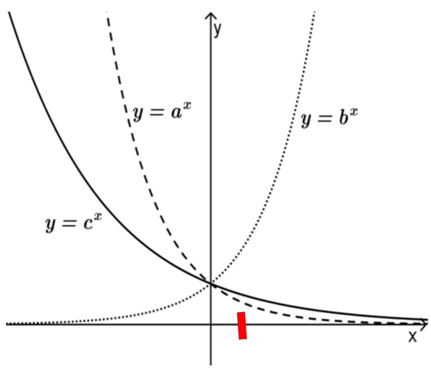
3.

a) Es gilt: $a = \frac{1}{b}$

da eine Spiegelung an der y-Achse entsteht, wenn vor das x ein Minus gesetzt wird:

$$y = a^x = b^{-x} = \frac{1}{b^x} \rightarrow a = \frac{1}{b}$$

b)



Angenommen an der rot markierten Stelle befindet sich der x-Wert x=1, dann gilt:

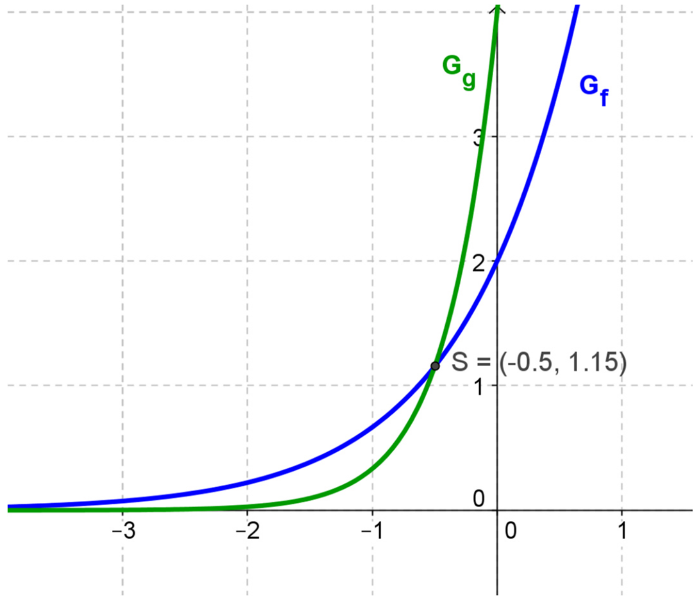
$$a < b < c$$

da für die y-Werte gilt:

$$a^1 < c^1 < b^1$$

Weiter müssen die Basen a und c kleiner sein als eins, da die dazugehörigen Graphen fallend sind.

4.



$$2 \cdot 3^x = 4 \cdot 12^x$$
$$\frac{3^x}{12^x} = \frac{4}{2}$$
$$\left(\frac{3}{12}\right)^x = 2$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2$$
$$\log_{\frac{1}{4}} 2 = x$$
$$x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}155$$
$$\Longrightarrow S(-0{,}5 \;/\; 1{,}155)$$

5.

a)

nach dem 0. Jahr:	$P_0 = 26.500$ €
nach dem 1. Jahr:	$P_1 = 26.500$ € $- 0{,}25 \cdot 26.500$€ $= 19875$ €
nach dem 2. Jahr:	$P_2 = P_1 - 0{,}1 \cdot P_1 = P_1 \cdot (1 - 0{,}1) = P_1 \cdot 0{,}9$
nach dem 3. Jahr:	$P_3 = P_2 - 0{,}1 \cdot P_2 = P_2 \cdot (1 - 0{,}1) = P_2 \cdot 0{,}9$ $= P_1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = P_1 \cdot 0{,}9^2$
nach dem 4. Jahr:	$P_4 = P_3 - 0{,}1 \cdot P_3 = P_3 \cdot 0{,}9 = P_1 \cdot 0{,}9^3$
nach dem x. Jahr:	$P_x = P(x) = P_1 \cdot 0{,}9^{x-1}$

Den Restwert des Autos nach x Jahren kann man mit folgender Funktion berechnen:

$$f: x \mapsto 19875 \text{ €} \cdot 0{,}9^{x-1}$$

b) $f(3) = 19875 \text{ €} \cdot 0{,}9^{3-1} = 16098{,}75 \text{ €}$