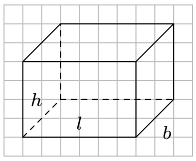
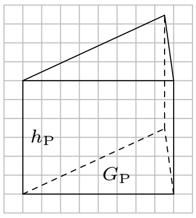
Raumgeometrie.

Quader Ein *Quader* ist ein Körper mit sechs rechteckigen Flächen, deren Winkel alle rechte Winkel sind.



$$O_{\mathrm{Q}} = 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h + 2 \cdot l \cdot b$$
$$V_{\mathrm{Q}} = l \cdot b \cdot h$$

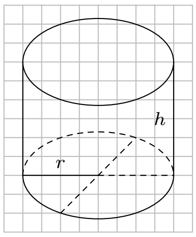
Prisma Ein *n-seitiges Prisma* ist ein Körper mit einem n-Eck als Grundfläche und einer dazu parallelen, kongruenten Deckfläche.



$$O_{\mathrm{P}} = 2 \cdot G_{\mathrm{P}} + M_{\mathrm{P}} = 2 \cdot G_{\mathrm{P}} + u_G \cdot h_{\mathrm{P}}$$
$$V_{\mathrm{P}} = G_{\mathrm{P}} \cdot h_{\mathrm{P}}$$

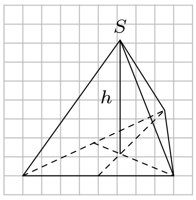
mit u_G dem Umfang der Grundfläche.

Zylinder Ersetzt man bei einem Prisma die n-eckige Grund- und Deckelfläche durch einen Kreis, erhält man einen *Zylinder*.



$$O_{\mathrm{Z}} = 2 \cdot G_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{Z}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$
$$V_{\mathrm{Z}} = G_{\mathrm{Z}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

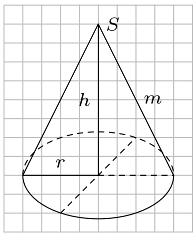
Pyramide Verbindet man die Eckpunkte eines n-Ecks mit einem Punkt S, der nicht in der gleichen Ebene liegt, erhält man eine *n-seitige Pyramide*.



$$O_{\mathrm{Pyr}} = G_{\mathrm{Pyr}} + M$$
$$V_{\mathrm{Pyr}} = \frac{1}{3} G_{\mathrm{Pyr}} \cdot h$$

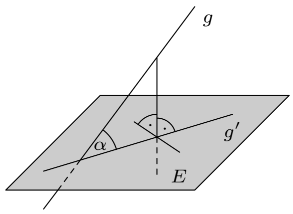
mit M der *Mantelfläche* der Pyramide.

Kegel Ersetzt man bei einer Pyramide die n-eckige Grundfläche durch einen Kreis, erhält man einen *Kegel*.



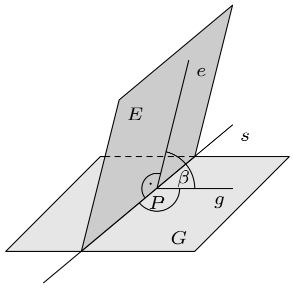
$$O_{\mathrm{K}} = G_{\mathrm{K}} + M_{\mathrm{K}} = \pi r^2 + \pi r \cdot m$$
$$V_{\mathrm{K}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene Unter dem Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E versteht man den Winkel α, den die Gerade mit ihrer senkrechten Projektion g' in die Ebene einschließt.



Man nennet α den *Neigungswinkel* der Gerade g gegen die Ebene E.

Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene Unter dem Winkel zwischen zwei Ebenen G und E versteht man den spitzen Winkel β zwischen zwei Geraden g und e, welche in dem selben Punkt P auf der Schnittgeraden s der beiden Ebenen senkrecht stehen.



Man nennt β den *Neigungswinkel* zwischen den Ebenen E und G.

Aufgabe 1 (Die Oberflächen- und Volumenformeln anwenden). Berechne das Volumen und die Oberfläche der beschriebenen geometrischen Körper.

a) Ein Zylinder mit Radius $r = 3{,}2\,\text{cm}$ und Höhe $h = 5{,}1\,\text{cm}$.
b) Ein 3,0 cm hohes Prisma mit einem rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche. Die Katheten sind 3,0 cm und 4,0 cm lang.
c) Ein 3,0 cm hohes Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 2,0 cm als Grundfläche.
d) Eine 4,1 cm hohe quadratische Pyramide mit Seitenlänge $a = 3{,}5\,\text{cm}$.
e) Ein Kegel mit Radius $r = 8{,}4\,\text{cm}$ und Höhe $h = 5{,}2\,\text{cm}$.

Aufgabe 2 (Konservendose). Eine Gemüsefirma liefert einen Teil ihrer Waren in Konservendosen aus. Zur Etikettierung bekleben sie die 12 cm hohe Dose mit bedrucktem Papier. Der Dosenboden hat einen Durchmesser von 5,0 cm.

Welchen Flächeninhalt muss das Papier haben, wenn es an der Klebestelle um einen halben Zentimeter überlappt?

Aufgabe 3 (Litfaßsäule). Eine Litfaßsäule ist eine zylinderförmige Werbetafel, die dir sicher ein Begriff ist. Schätze ihre Höhe und ihren Durchmesser ab und berechne daraus den ungefähren Wert der gesamten Werbefläche.

Wie viele DIN-A1-Poster (Maße: $594\,\text{mm} \times 841\,\text{mm}$) haben theoretisch darauf Platz? Warum stimmt diese Rechnung in der Realität nicht genau?

Aufgabe 4 (Louvre).
Die abgebildete Glaspyramide überdacht den unterirdischen Eingangstrakt des Louvre in Paris. Sie hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 34,2 m, die Seitenkanten sind 32,4 m lang.

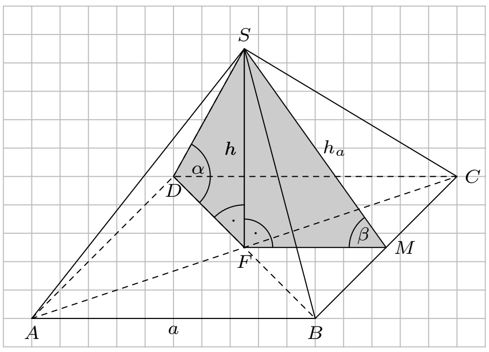
Welches Volumen fasst die Pyramide?

Aufgabe 5 (Quader als spezielles Prisma). Betrachte einen Quader als ein Prisma der Höhe h mit rechteckiger Grundfläche der Länge l und Breite b. Leite aus der Formel für die Oberfläche eines Prismas die allgemein Formel für die Oberfläche eines Quaders her.

Aufgabe 6 (Neigungswinkel bestimmen). Skizzen müssen nicht maßstabsgetreu sein!

a) Gegeben ist die dargestellte vierseitige Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat der Seitenlänge $a = 5{,}0\,\text{cm}$ und ihre Höhe ist $h = 3{,}5\,\text{cm}$.

   Berechne den Neigungswinkel α der Seitenkante $[DS]$ und den Neigungswinkel β der Seitenfläche BCS gegenüber der Grundfläche $ABCD$.



b) Ein Würfel $ABCDEFGH$ mit Kantenlänge 3 cm ist gegeben. Zeichne ein Schrägbild des Würfels und bestimme den Neigungswinkel α der Raumdiagonalen $[BH]$ gegenüber der Grundfläche $ABCD$.

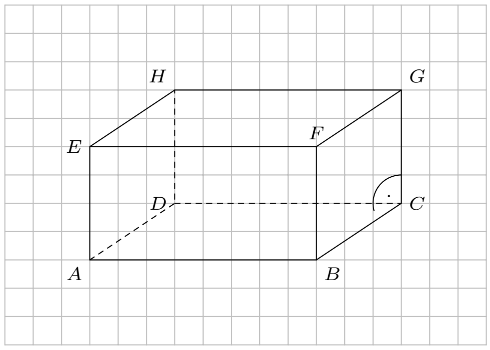
   Wie verändert sich α, wenn sich die Kantenlänge des Würfels verdoppelt?

c) Ein Quader hat die Maße $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 5\,\text{cm}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$.

Bestimme mit Hilfe einer Konstruktion den Neigungswinkel der Geraden GM gegen die Grundfläche $ABCD$.

Vervollständige dazu erst die nebenstehende, nicht maßstabsgetreue, Skizze.

Hinweis: Berechne zunächst $\overline{MC}$.



d) Gegeben ist eine 5 cm hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge 6 cm). Die Spitze S liegt senkrecht über der Mitte der Kante $[AD]$.

Zeichne eine Skizze der Pyramide und bestimme den Neigungswinkel β der Seitenfläche BCS gegenüber der Grundfläche.

Aufgabe 7 (Pralinenverpackung).

Ein Schokoladenhersteller plant neue „Riesen-Schokopralinen“ in symmetrischer Prismenform. Der Boden ist ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Der Deckel ein Rechteck mit Seitenlängen 3 cm und 2 cm. Der Abstand von Boden und Deckel beträgt 2 cm.

Die Praline soll mit Karamell umschlossen werden. Berechne dazu die Oberfläche der Praline.

Hinweis: Manchmal stehen Prismen nicht auf ihrer Grundfläche...