Aufgabe 1 (Binomische Formeln: Vorwärts).

a) $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

b) $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot a + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = a^2 + 3a + \frac{9}{4}$

c) $\left(\frac{1}{2}b - 7\right) \cdot \left(\frac{1}{2}b + 7\right) = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 7^2 = \frac{b^2}{4} - 49$

d) $\left(\frac{3}{c} - 4d\right)^2 = \left(\frac{3}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{c} \cdot 4d + (4d)^2 = \frac{9}{c^2} - \frac{24d}{c} + 16d^2$

Aufgabe 2 (Binomische Formeln: Rückwärts).

a) $x^2 - 32x + 256 = x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x + 16^2 = (x-16)^2$

b) $0{,}03 - \frac{y^2}{9} = 0{,}9^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(0{,}9 + \frac{y}{3}\right) \cdot \left(0{,}9 - \frac{y}{3}\right)$

c) $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1) \cdot (x+1)$

d) $x^4y^6 + 4x^5y^4 + 4x^6y^2 = \left(x^2y^3\right)^2 + 2 \cdot \left(x^2y^3\right) \cdot \left(2x^3y\right) + \left(2x^3y\right)^2 = \left(x^2y^3 + 2x^3y\right)^2$

Aufgabe 3 (Den Scheitel finden).

a) *Mit quadratischer Ergänzung:* $y = 3x^2 + 36x + 102$

Zuerst klammern wir den Streckfaktor $a = 3$ aus:

$$y = 3x^2 + 36x + 102 = 3 \cdot \left(x^2 + 12x + 34\right)$$

Die Vorzeichen sagen uns, dass wir die 1. Binomische Formel $(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ zu Hilfe nehmen müssen. Der $2ab$-Term ist in unserem Fall gerade $12x$. Wir erkennen, dass $b = 6$ sein muss und ergänzen unseren Term dementsprechend:

$$y = 3 \cdot \left(x^2 + 12x + 34\right) = 3 \cdot \big(\underbrace{x^2 + 12x + 6^2}_{=(x+6)^2} - 6^2 + 34\big) = 3 \cdot \left[(x+6)^2 - 2\right]$$

Den nicht-faktorisierten Teil multiplizieren wir aus der Klammer heraus und wir erhalten die Gleichung in Scheitelform:

$$y = 3 \cdot \left[(x+6)^2 - 2\right] = 3 \cdot (x+6)^2 - 3 \cdot 2 = 3 \cdot (x+6)^2 - 6$$

b) *Ohne quadratische Ergänzung:* $y = x^2 - x - 8{,}75$

Wir wissen, dass die x-Koordinate des Scheitels x_s genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt. Diese Nullstellen ermitteln wir mit Hilfe der „Mitternachtsformel" als erstes:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8{,}75)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 35}}{2} = \frac{1 \pm 6}{2} \begin{cases} = 3{,}5 \\ = -2{,}5 \end{cases}$$

Wir stellen uns eine Zahlengerade mit diesen beiden Punkten $-2{,}5$ und $3{,}5$ vor. In der Mitte liegt genau $x_s = 0{,}5$. Der y-Wert des Scheitels y_s ist gerade der Funktionswert an der Stelle x_s:

$$y_s = x_s^2 - x_s - 8{,}75 = (0{,}5)^2 - 0{,}5 - 8{,}75 = -9$$

Die Koordinaten des Scheitels können wir jetzt einfach in die allgemeine Scheitelform einsetzen:

$$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = a \cdot (x - 0{,}5)^2 - 9$$

Den Streckfaktor $a = 1$ lesen wir aus der gegebenen Funktionsvorschrift in Normalform ab. Also ist die gesuchte Form:

$$y = (x - 0{,}5)^2 - 9$$

Hinweis: Dieses Verfahren funktioniert nur, wenn die quadratische Funktion eine oder zwei Nullstellen hat! Warum?

Aufgabe 4 (Quadratische Gleichungen lösen).

a) Da x nur in der zweiten Potenz in der Gleichung vorkommt, brauchen wir den Umweg über die „Mitternachtsformel“ nicht zu gehen. Wir stellen die Gleichung um und erhalten sofort:

$$7 - x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad -x^2 = -3$$

$$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

und die Lösungsmenge ist $L = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

b) Auch hier müssen wir nicht die „Mitternachtsformel“ zu Hilfe nehmen, da wir x ausklammern können. Die ersten Lösung $x_1 = 0$ erhalten wir also sofort:

$$0 = x^2 + 5x = x \cdot (x + 5) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$0 = x + 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -5$$

und die Lösungsmenge ist $L = \{-5, 0\}$.

c) In diesem Fall ist es sinnvoll, mit der „Mitternachtsformel“ zu arbeiten. Wir setzen ein und erhalten:

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48}}{-6} = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{-6}$$

Die negative Diskriminante zeigt uns, dass die Gleichung keine Lösung hat: $L = \{\ \}$.

Aufgabe 5 (Quadratische Funktion durch zwei Nullstellen). Die Aufgabe lässt sich auf viele verschiedene Arten lösen. Bei allen Lösungen wählen wir den Streckungsfaktor $a = 1$, um uns die Arbeit zu erleichtern.

a) *Idee: Satz von Vieta*

Der Satz von Vieta besagt: Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q = 0$, dann ist $-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$. Da die gesuchte Funktion die Nullstellen $x_1 = 1 + \sqrt{7}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{7}$ haben soll, gilt:

$$-p = 1 + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} = 2$$

$$q = \left(1 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{7}\right) = 1^2 - \sqrt{7}^2 = 1 - 7 = -6$$

und die Funktion lautet:

$$y = x^2 - 2x - 6$$

b) *Idee: Angeben der Funktion in faktorisierter Form*

Wir wissen, dass sich eine quadratische Funktion mit den Nullstellen x_1 und x_2 in faktorisierter Form schreiben lässt als $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$. Da wir die beiden Nullstellen bereits kennen, brauchen wir nur einzusetzen:

$$y = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left(x - (1 + \sqrt{7})\right) \cdot \left(x - (1 - \sqrt{7})\right)$$

Ausmultiplizieren liefert die Gleichung in Normalform:

$$\begin{aligned} y &= \left(x - (1 + \sqrt{7})\right) \cdot \left(x - (1 - \sqrt{7})\right) \\ &= x^2 - x \cdot (1 + \sqrt{7}) - x \cdot (1 - \sqrt{7}) + (1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7}) \\ &= x^2 - x \cdot \left(1 + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7}\right) + \left(1^2 - \sqrt{7}^2\right) \\ &= x^2 - 2x - 6 \end{aligned}$$

c) *Verwende nur die Lösungsformel (knifflig!!)*

Wir gehen von der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion $y = x^2 + bx + c$ aus. Die Nullstellen dieser Funktion lassen sich mit der „Mitternachtsformel“ bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Mit einem Blick auf die angegebenen Nullstellen $x_1 = 1 + \sqrt{7}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{7}$ ist $b = -2$ und wir erhalten

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 - 4c}}{2}$$

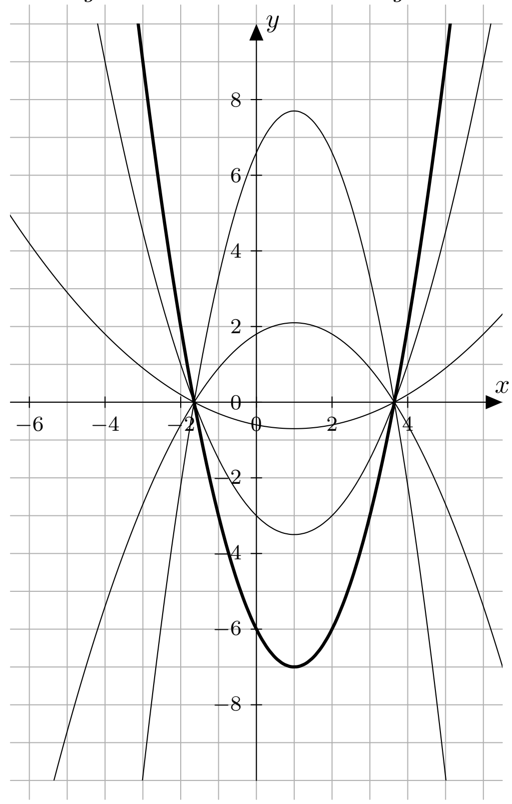
Dann ergibt sich c aus

$$\frac{\sqrt{4 - 4c}}{2} = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad 4 - 4c = 28 \quad \Rightarrow \quad c = -6$$

und die Funktion lautet:

$$y = x^2 - 2x - 6$$

Hinweis: Es gibt sogar unendlich viele quadratische Funktionen, die diese beiden Nullstellen haben. Die folgende Skizze zeigt neben der von uns hergeleiteten noch weitere Möglichkeiten.



Aufgabe 6 (Modellieren mit Quadratischen Funktionen).

a) Die Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 60$. Der Scheitel hat die Koordinaten $S(30|40)$.

b) Die allgemeine Scheitelform lautet $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$. Wir kennen bereits x_s und y_s:

$$y = a \cdot (x - 30)^2 + 40$$

Um den Streckungsfaktor a zu ermitteln, müssen wir einen weiteren Punkt, der auf der Parabel liegt, in die Funktionsvorschrift einsetzen. Es bietet sich an, den Nullpunkt $(0|0)$ zu verwenden:

$$0 = a \cdot (0 - 30)^2 + 40$$

$$0 = a \cdot 900 + 40$$

$$a = -\frac{40}{900} = -\frac{2}{45}$$

Damit lautet die gesuchte Parabelgleichung:

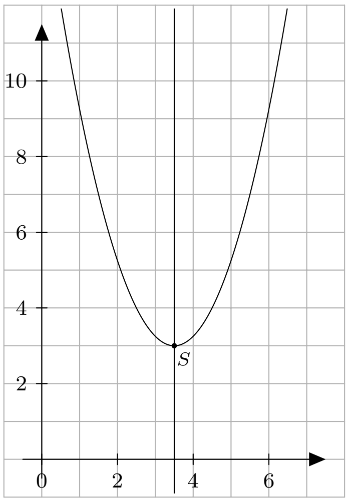
$$y = -\frac{2}{45} \cdot (x - 30)^2 + 40$$

Aufgabe 7 (Der Graph von Funktionen).

Die Begründungen der Aussagen über den Graph sind in Klammern angegeben.

Der Graph der Funktion $y = (x - 3{,}5)^2 + 3$ ist nach oben geöffnet *(*$a > 0$*)* und kongruent zur Normalparabel *(*$|a| = 1$*)*. Der Scheitel liegt bei $S(3{,}5|3)$ *(Funktionsvorschrift in Scheitelform gegeben)*. Zudem ist der Scheitel der tiefste Punkt der Parabel *(nach oben geöffnet)*. Es gibt keine Nullstellen *(nach oben geöffnet und Scheitel liegt über der* x*-Achse)*. Die Gerade $x = 3{,}5$ ist die Symmetrieachse des Graphen *(Scheitel)*.

Anhand dessen lässt sich der Graph leicht als verschobene Normalparabel skizzieren.

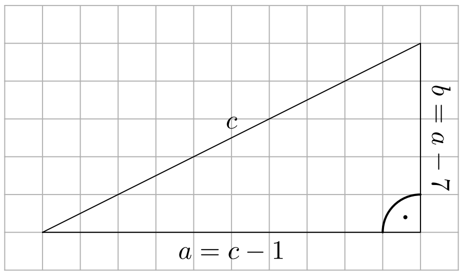


Aufgabe 8 (Weiter denken).

Zur Vereinfachung verzichten wir bei der kompletten Rechnung auf die Verwendung von Einheiten. Mit Hilfe der Aufgabenstellung fertigen wir die nebenstehende Skizze an und kommen auf die Gleichungen:

$$a = c - 1$$

$$b = a - 7 = c - 8$$



Einen Zusammenhang zwischen den Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks liefert der Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Einsetzen und Umformen liefert:

$$(c - 1)^2 + (c - 8)^2 = c^2$$

$$c^2 - 2c + 1 + c^2 - 16c + 64 = c^2$$

$$c^2 - 18c + 65 = 0$$

Diese quadratische Gleichung lässt sich mit der „Mitternachtsformel“ lösen:

$$c_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 260}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2} \begin{cases} = 13 \\ = 5 \end{cases}$$

Im Kontext der Aufgabe macht jedoch nur die Lösung $c_1 = 13$ Sinn, denn für $c_2 = 5$ hätten die Kathete b eine negative Länge. Also erhalten wir $c = 13\,\text{cm}$, $a = 12\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{cm}$.