Aufgabe 1 (Potenzschreibweise benutzen). Berechne den Wert der Potenzen ohne Taschenrechner.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ b) $\left(\sqrt{7}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{7}\right)^2\right]^2 = 7^2 = 49$ c) $\left(-\sqrt{17}\right)^2 = 17$

Schreibe die angegebenen Zahlenwerte als Potenzen

d) $32 = 2^5$ e) $0{,}36 = 0{,}6^2$ f) $\frac{27}{125} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

Aufgabe 2 (Potenzgesetze anwenden). Berechne den Wert der Potenzen unter Zuhilfenahme der Potenzgesetze.

a) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ c) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}$

d) $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ e) $13^{-x} = \frac{1}{13^x}$ f) $b^{-z} = \frac{1}{b^z}$

g) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$ h) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ i) $4^2 \cdot 4 = 4^{2+1} = 4^3 = 64$

j) $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$ k) $y^4 \cdot y = y^{4+1} = y^5$ l) $z^3 \cdot z^x = z^{3+x}$

m) $\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$ n) $3^7 : 3^6 = 3^{7-6} = 3^1 = 3$ o) $2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

p) $\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1 = x$ q) $z^6 : z^4 = z^{6-4} = z^2$ r) $\frac{y^a}{y^{3a}} = y^{a-3a} = y^{-2a} = \frac{1}{y^{2a}}$

s) $\left(3^2\right)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729$ t) $\left(2^5\right)^2 = 2^{5\cdot 2} = 2^{10} = 1\,024$ u) $\left(2^3\right)^{-2} = 2^{3\cdot(-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

v) $\left(x^2\right)^2 = x^{2\cdot 2} = x^4$ w) $\left(y^6\right)^{-3} = y^{6\cdot(-3)} = y^{-18} = \frac{1}{y^{18}}$ x) $\left(z^{-4}\right)^{-2} = z^{(-4)\cdot(-2)} = z^8$

Aufgabe 3 (Stark verkürzen). Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Bei diesen Aufgaben musst du mehrere Potenzgesetze verwenden.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} \cdot \frac{b^n}{b^n} = a^{n-n} \cdot b^{n-n} = a^0 \cdot b^0 = 1$

b) $\frac{(4xy)^3}{(6x^2)^3} \cdot \frac{5}{y^3} = \frac{64x^3y^3 \cdot 5}{216x^6 \cdot y^3} = \frac{320}{216} \cdot \frac{x^3}{x^6} \cdot \frac{y^3}{y^3} = \frac{40}{27} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{40}{27} \cdot x^{-3}$

c) $\frac{x^y}{x^{y+1}} = x^{y-(y+1)} = x^{y-y-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

d) $-6a^8b^3 \cdot 2a^2b^3 = -12 \cdot a^{8+2} \cdot b^{3+3} = -12a^{10}b^6$

e) $x^{2a} \cdot y^a = \left(x^2y\right)^a$

f) $\frac{u^n}{v^{m+1}} \cdot \frac{v^m}{u^{2n+5}} = \frac{u^n}{u^{2n+5}} \cdot \frac{v^m}{v^{m+1}} = u^{n-(2n+5)} \cdot v^{m-(m+1)} = u^{-n-5} \cdot v^{-1} = \frac{1}{u^{n+5} \cdot v}$

Aufgabe 4 (Geschickt Ausklammern). Stelle die Terme als Produkte dar.

a) $7x^3 + 5x^2 = x^2\,(7x+5)$

b) $3x^3 + 5x^2 + 5 + 3x = 3x\left(x^2+1\right) + 5\left(x^2+1\right) = (3x+5)\left(x^2+1\right)$

Kürze die Brüche so weit wie möglich.

c) $\dfrac{3ab^2 - 21a}{9ab^2 - 63a} = \dfrac{3 \cdot \left(ab^2 - 7a\right)}{9 \cdot (ab^2 - 7a)} = \dfrac{3a\left(b^2 - 7\right)}{9a\left(b^2 - 7\right)} = \dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{x^4y - x^2y^2}{x^3y^2 - xy^3} = \dfrac{x^2\left(x^2y - y^2\right)}{x\left(x^2y^2 - y^3\right)} = \dfrac{x^2y\left(x^2 - y\right)}{xy^2\left(x^2 - y\right)} = \dfrac{x^2y}{xy^2} = \dfrac{x}{y}$

Aufgabe 5 (Den Hauptnenner finden). Bringe die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

a) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{a}{a^2} = \dfrac{1+a}{a^2}$

b) $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} = \dfrac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \dfrac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{a^2 - ab + ba + b^2}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

c) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{3 \cdot (x+4)}{(x-2)(x+4)} - \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{3x + 12 - x^2 + 2x}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{-x^2 + 5x + 12}{(x-2)(x+4)}$

Aufgabe 6 (Potenzen mit rationalen Exponenten). Fasse so weit wie möglich zusammen. Gib die Ergebnisse in Wurzelschreibweise an.

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

b) $\left(3^{\frac{1}{16}}\right)^8 + 7\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{16}\cdot 8} + 7 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (1+7) \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{5}} = \left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[3]{z \cdot \sqrt[4]{\dfrac{1}{z}}} = \sqrt[3]{z \cdot z^{-\frac{1}{4}}} = \left(z \cdot z^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(z^{1-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(z^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{z}$

e) $\sqrt[3]{8e^6} \cdot \left(e^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{10}{3}} = \left(8e^6\right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot e^{6 \cdot \frac{1}{3}} \cdot e^{-2} = 2 \cdot e^2 \cdot e^{-2} = 2 \cdot e^{2-2} = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2$

f) $y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0{,}75} \cdot \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^5 = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}\cdot 5} = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{5}{4}} = y^{-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}} = y^0 = 1$