Extremwertprobleme – Lösung

1. Für die Fläche des Laufstalls gilt: $A(a,b) = a \cdot b$

   Weiterhin gilt (Nebenbedingung): $a + b = 6m$ also $b = 6m - a$

   Einsetzen (ohne Einheit): $A(a) = a \cdot (6 - a)$

   Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

   1. Variante: Ausmultiplizieren und quadratisch ergänzen:

   $$A(a) = -a^2 + 6a$$
   $$A(a) = -(a^2 - 6a)$$
   $$A(a) = -(a^2 - 6a + 9 - 9)$$
   $$A(a) = -[(a-3)^2 - 9]$$
   $$A(a) = -(a-3)^2 + 9$$

   Der Scheitel liegt also bei $S(3|9)$, d.h. Seite $a = 3m$, damit $b = 3m$ und der maximale Flächeninhalt (als *y*-Wert des Scheitels) ist: $A_{max} = 9m^2$.

   2. Variante: Kurz nachdenken! Die Nullstellen der Funktion $A(a) = a \cdot (6 - a)$ liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$. Der Scheitel muss in der Mitte liegen, also an der Stelle $x_s = 3$. Dies ist der extremale Wert für die Funktion. Also $a = 3m$, damit wieder $b = 3m$ und $A_{max} = 9m^2$

2. Für die Summe der Quadrate gilt: $f(x,y) = x^2 + y^2$

   Weiterhin gilt (Nebenbedingung): $x + y = 80$ also $y = 80 - x$

   Einsetzen: $f(x) = x^2 + (80 - x)^2$
   $$f(x) = x^2 + 6400 - 160x + x^2$$
   $$f(x) = 2x^2 - 160x + 6400$$

   Quadratisch ergänzen: $f(x) = 2(x^2 - 80x) + 6400$
   $$f(x) = 2(x^2 - 80x + 1600 - 1600) + 6400$$
   $$f(x) = 2[(x-40)^2 - 1600] + 6400$$
   $$f(x) = 2(x-40)^2 + 3200$$

   Der Scheitel dieser Funktion liegt bei $S(40|3200)$, d.h. die niedrigste Summe, nämlich 3200 ergibt sich für die Zahlen $x = 40$ und $y = 40$.

3. Für das Volumen der Kiste gilt: $V(g,h) = g \cdot g \cdot h$. (Die beiden Grundseiten sind gleich lang)

   Wenn man die Tiefe des Einschneidens als x bezeichnet, dann gilt: $h = x$ und $g = 50 - 2x$

   Also: $V(x) = (50 - 2x)(50 - 2x) \cdot x$
   $$V(x) = (2500 - 200x + 4x^2) \cdot x$$
   $$V(x) = 2500x - 200x^2 + 4x^3$$

   Das können wir rechnerisch aktuell noch nicht lösen, zeichnerisch ergibt sich $x = 8,\overline{3}$. Das sich dabei ergebende Volumen ist: $V(x) = 9259$.

4. Für die Fläche der Weide gilt: $A(a,b) = a \cdot b$

   Weiterhin gilt (Nebenbedingung): $2a + b = 120m$ also $b = 120m - 2a$

   Einsetzen (ohne Einheit): $A(a) = a \cdot (120 - 2a)$

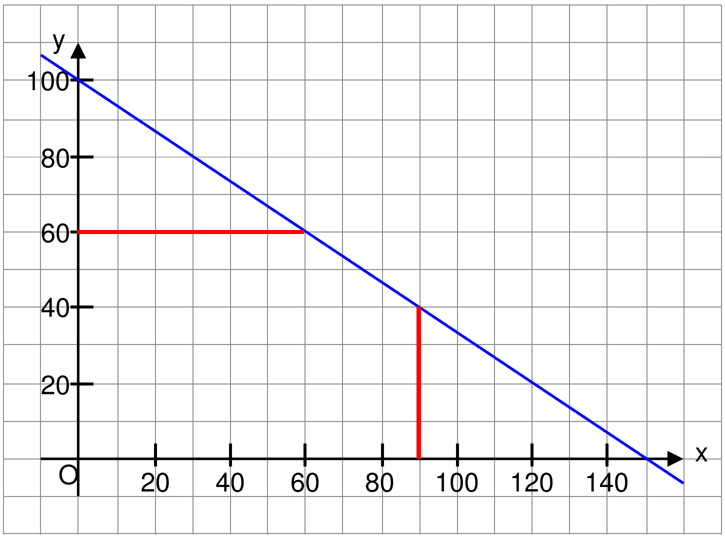
   $$A(a) = 2a \cdot (60 - a)$$

   Die Nullstellen der Funktion $A(a) = 2a \cdot (60 - a)$ liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 60$.

   Der Scheitel muss in der Mitte liegen, also an der Stelle $x_s = 30$.

   Dies ist der extremale Wert für die Funktion. Also $a = 30m$, damit ist $b = 60m$.

   Der maximale Flächeninhalt ist also $A_{max} = 1800m^2$.

5. 

   Für die Fläche des Rechtecks gilt: $A(x,y) = x \cdot y$

   Wähle den linken, unteren Eckpunkt als Ursprung eines Koordinatensystems. Der Eckpunkt, von dem x und y abhängen, liegt dann auf einer Geraden, deren Gleichung man ermitteln kann, indem man die Punkte $P(60|60)$ und $Q(90|40)$ einsetzt.

   $f(x) = mx + t$ (1) $60 = 60m + t$

   (2) $40 = 90m + t$

   (2)-(1): $30m = -20$ also $m = -\frac{2}{3}$. Eingesetzt folgt: $t = 100$

   Die Eckpunkte erfüllen also die Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 100$

   Einsetzen: $A(x) = x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 100\right)$

   Die Nullstellen der Funktion $A(x)$ liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 150$.

   Der Scheitel muss in der Mitte liegen, also an der Stelle $x_s = 75$.

   Dies ist der extremale Wert für die Funktion. Also $x = 75cm$, damit ist $y = 50cm$.

   Der maximale Flächeninhalt ist also $A_{max} = 3750cm^2$.