Wilhelm-Hausenstein-Gymnasium
Sprachliches und Naturwissenschaftlich-technologisches Gymnasium
Elektrastraße 61 • **81925 München**
Telefon (089) 92299690 • Fax (089) 922996939

Aufgabenpaket zum Crashkurs Mathematik

Liebe Schülerin oder lieber Schüler!

Dieses Aufgabenpaket hast Du erhalten, weil Deine Leistungen im Fach Mathematik auf Lücken oder Schwächen hinweisen. Um für das nächste Schuljahr und auch den Crashkurs gut vorbereitet zu sein, wollen wir dir hier ein paar Tipps zur Bearbeitung geben, an die du dich unbedingt halten solltest!

- ✓ Überlege dir genau, an welchen Tagen du wie viel Zeit hast und mach dir einen <u>Lernplan</u> über die ganzen Ferien hinweg! Wenn du dein Tagespensum erledigt hast mach einen Haken hinter den Tag ☺!
- ✓ Kauf dir ein <u>Heft</u>, in dem du alle Aufgaben löst, dadurch siehst du jeden Tag, wie viel du schon geschafft hast. Bring dann das volle Heft in den Crashkurs mit!
- ✓ <u>Wiederhole</u> jeden Tag anhand weniger Aufgaben den Stoff vom Vortag, damit du das Gelernte länger behältst!
- ✓ Wechsle die Themengebiete ab, dadurch festigst Du die Inhalte.
- ✓ Arbeite gründlich wie im Unterricht: mit sauberen Skizzen, Ansätzen und <u>ausführlichen</u> Lösungen. Nicht alles im Kopf versuchen!
- ✓ Manche Aufgaben sind etwas schwerer. Versuche ruhig etwas länger auf die Lösung zu kommen. Zusätzliche Hilfen findest Du im Schulbuch (Rückblicke!), in Deinen Schulheften der letzten Jahre und bei Freunden und Eltern.
- ✓ Erst als letzte Hilfe schaust Du in die Lösungen. Und auch dann nur einen Tipp holen und anschließend wieder selbständig arbeiten!
- ✓ <u>Markiere</u> die Aufgaben, die du trotz Lösung nicht verstehst im Aufgabenpaket damit du im Crashkurs den Lehrer danach fragen kannst!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

AUFGABENSAMMLUNG 9. KLASSE

1. Reelle Zahlen

(1) Vereinfache soweit wie möglich. Alle Variablen sind aus $\mathbb{R}^+$.

(a) $\sqrt{4a} - 4\sqrt{a} + \sqrt{ab^2}$

(b) $\sqrt{\dfrac{a}{3b}} : \sqrt{\dfrac{b^3}{27a}}$

(c) $\sqrt{b} + \sqrt{b^3} + \sqrt{b^5}$

(d) $\sqrt{\dfrac{c}{2}} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{6}{c}} + \sqrt{2}\right)$

(2) Schreibe ohne Wurzelzeichen ($r \in \mathbb{R}$).

(a) $\sqrt{r^2}$

(b) $\sqrt{100r^2 - (6r)^2}$

(c) $\sqrt{(1-r)^2}$

(d) $\sqrt{r^4 \cdot (r+1)^2}$

(e) $\sqrt{4r^2 + 16r + 16}$

(3) Wurde richtig umgeformt? Wenn nicht, wie muss es richtig heißen?

(a) $(4a - b + 5c)^2 = 16a^2 + b^2 + 25c^2$

(b) $28c^2 + 84cd + 63d^2 = 7(2c + 3d)^2$

(c) $(6x + 3y)^2 = 6x^2 + 36x + 3y^2$

(d) $55ab^2 - 75b^3 + 5b^2 = 5b^2 \cdot (11a - 15b)$

(4) Überprüfe, ob die Gleichungen richtig sind:

(a) $\sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$

(b) $\sqrt{6 - 2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

(c) $\sqrt{7 - 4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$

(5) Berechne ohne TR:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{18} + \sqrt{45}$

(c) $\sqrt{270000}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{b^2}} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

(e) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$

(f) $\sqrt{75} + 2\sqrt{3}$

(g) $\frac{7^2}{\sqrt{3 \cdot 7^4}} : 7$

(h) $\sqrt{(x-y)^2}$

(6) (a) Gib die drei binomischen Formeln an.

(b) Wende die binomischen Formeln an:

(i) $(1 + \sqrt{3})^2$

(ii) $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

(iii) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

(iv) $(\sqrt{3} + 0)^2$

(v) $(\sqrt{11} + 45 + 3\sqrt{11})^2$

(c) Gib mit rationalem Nenner an:

(i) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{44}-\sqrt{7}}$

(ii) $\frac{14}{2+\sqrt{11}}$ (iv) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}+\sqrt{9}}$

(d) Die Seiten eines Quadrats der Seitenlänge a werden um 2cm vergrößert. Gib einen Term für die **Zunahme (!)** des Flächeninhalts an. Vereinfache den Term.

2. Quadratische Funktionen

(7) Berechne die Nullstellen und die Stellen, an denen der Funktionswert 2 angenommen wird.

(a) $f_1(x) = x^2 - 4x + 6$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$

(c) $f_3(x) = -x^2 + 5x - 4$

(8) Berechne **möglichst geschickt** die Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $x(x-2) = 0$

(b) $2x^2 + 3x = 0$

(c) $2x^2 + 16 = 12x$

(d) $2 = (3+x)^2$

(e) $-x^2 - 2 = 0{,}25 + 3x$

(f) $2x + x + 16 = 0$

(g) $t^2 + \sqrt{2}t - 1 = 0$

(h) $x^2 - x = x - x^2$

(9) Gib jeweils eine quadratische Gleichung mit der angegebenen Eigenschaft an:

(a) Die Gleichung hat nur die Lösung -2.

(b) Die Gleichung hat keine Lösungen.

(c) Die Gleichung hat die Lösungen -2 und 2.

(d) Die Gleichung hat die Lösungen -1 und 3.

(10) Die höchstzulässige Masse einer Person, die eine Eisfläche der Dicke d betreten kann, lässt sich wie folgt berechnen:

$$m = 4\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot d^2.$$

(a) Berechne diese Masse bei den Eisdicken 1 cm, 2 cm, 3 cm sowie 4 cm.

(b) Wie verändert sich die Tragfähigkeit, wenn sich die Eisdicke verdoppelt oder verdreifacht? Zeichne den Graphen der Funktion der Funktion $d \mapsto m$ für das Intervall $0\,\text{cm} \leq d \leq 6\,\text{cm}$.

(c) Löse grafisch *und* rechnerisch:
Daniel hat mit Kleidung die Masse 45 kg. Wie dick muss das Eis sein, damit er es betreten darf?

(d) Die wievielfache Eisdicke benötigt Daniels Vater ($m_V = 90\,\text{kg}$)?

(11) Bringe folgende Funktionen auf Scheitelform und gib die Koordinaten des Scheitels an. Berechne auch die Nullstellen der Funktion, falls es welche gibt.

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 - 4$

(c) $f(x) = x^2 + 2x$

(d) $f(x) = x^2 - 2x - 27$

(e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1{,}5$

3. Quadratische Funktionen in Anwendungen

(12) Aus einem Rohr schießt Wasser waagrecht hinaus. Der Strahl kann mit der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3{,}25$$

beschrieben werden.

(a) Zeichne den Graphen im Intervall $[0;4]$ in ein Koordinatensystem.

(b) Berechne den Punkt, an dem der Wasserstrahl auf den Boden (x-Achse) trifft.

(c) Es soll ein Auffangbecken konstruiert werden, das mit der Funktion $y = \frac{1}{5}x$ beschrieben werden kann. Zeichne es in die Skizze ein!

(d) Kennzeichne den Punkt, wo der Strahl auf das Auffangbecken trifft und <u>berechne</u> seine Koordinaten!

(13) Ermittle die Lösungsmenge der Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 \quad (I) \\ x+2y+z &= 9 \quad (II) \\ x-y-z &= -5 \quad (III) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x-y+z &= 3 \quad (I) \\ 3x+y+z &= 0 \quad (II) \\ 2x+2y+z &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \quad (I) \\ 3x+y+z &= \frac{2}{3} \quad (II) \\ 2x+2y+z &= \frac{2}{3} \quad (III) \end{aligned}$$

(14) In einem Dreieck ABC ist α doppelt so groß wie β, außerdem ist β dreifach so groß wie γ. Löse das sich ergebende Gleichungssystem und bestimme so die Winkel.

(15) In einem Dreieck ist die Summe von α und β gleich 90 Grad, ebenso die Summe von β und γ. Zeige, dass es ein solches Dreieck nicht geben kann.

4. Die Satzgruppe des Pythagoras

(16) Formuliere den Kathetensatz, den Höhensatz sowie den Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ABC, erstelle auch eine passende Skizze ($\gamma = 90°$, Hypotenusenabschnitte q und p).

(17) In einem *gleichschenkligen* Dreieck mit Basis b =16 cm gilt für die Höhe auf b: $h_b = 3\,\text{cm}$. Bestimme die Länge der Schenkel des Dreiecks. Fertige zunächst eine Skizze an.

(18) Die Diagonale eines Quadrats habe die Länge a.

(a) Wie lang sind die Seiten des Quadrats? Erstelle eine Skizze.

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?

(19) Ein Auto habe näherungsweise die Grundfläche 1,75 mal 3,55 Meter. Wie breit muss eine Straße mindestens sein, damit es theoretisch möglich ist, mit diesem Auto zu wenden? Skizze!

(20) Zeichne ein Quadrat mit Seitenlänge a und berechne die Länge d der Diagonale.

(21) Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Kantenlängen 1,5 cm, 2 cm und 3 cm und berechne die Länge der Raumdiagonale d.

(22) Höhe im gleichschenkligen Dreieck

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkel a, Basis b und Höhe h. Berechne die Länge von h in Abhängigkeit von a und b.

(23) Eine Fliege sitzt im Punkt A innerhalb eines (hohlen) Würfels der Kantenlänge a.

Wie lange ist ihr Weg, wenn sie zur Ecke F...

- quer durch den Würfel fliegt (w_1)?
- an den Wänden krabbelt (w_2)?

Tipp: Zeichne das Netz des Würfels.

(24) Ein gleichschenkliges Dreieck wird entlang seiner Höhe halbiert. Diese beträgt $h = 7\,\text{cm}$. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

5. Mehrstufige Zufallsexperimente

(25) Ein Laplace-Würfel wird dreimal geworfen.

Erkläre, was „Laplace“ in diesem Fall bedeutet.

Berechne dann die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) dreimal die Eins geworfen wird.
(b) dreimal dieselbe Zahl geworfen wird.
(c) genau einmal die Eins geworfen wird.
(d) beim dritten Wurf zum ersten Mal eine Eins geworfen wird.
(e) genau einmal eine gerade Zahl geworfen wird.

(26) Susi und Max werfen gleichzeitig je einen Stein auf eine 10 m entfernte Pfütze. Susis Treffsicherheit beträgt 40 %, die von Max 30 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft mindestens ein Stein sein Ziel?

(27) Eine Umfrage zur Beliebtheit einer neuen Fernsehsendung wird veröffentlicht:

Jeder vierte Zuschauer ist jünger als 20 Jahre; von diesen haben 70 % eine positive Meinung zur Sendung. Von den restlichen Zuschauern haben immerhin 40 % eine positive Meinung.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Zuschauer jünger als 20 Jahre und hat eine positive Meinung zur Sendung?
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Zuschauer keine positive Meinung zur Sendung?

(28) Ein „Teekenner“ behauptet, er könne die Teesorten *First Flush* (Begriff für Darjeeling- und Assam-Tees der ersten Pflückung nach dem Winter) und *Second Flush* (zweite Pflückung) am Geschmack unterscheiden. Er bekommt dazu einige Tassen vorgesetzt, wobei jede entweder *First* oder *Second Flush* enthält. Äußerlich sind die verschiedenen Sorten nicht zu unterscheiden.

(a) Der „Teekenner“ bekommt zwei Tassen vorgesetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benennt er den Inhalt der beiden Tassen richtig, wenn er rät?

(b) Der Test wird nun so abgeändert, dass der „Teekenner“ vier Tassen vorgesetzt bekommt. Er soll jeweils den Inhalt bestimmen. Erläutere, ob ihm deiner Meinung nach das Prädikat „Teekenner“ zu Recht zusteht, wenn er den Inhalt bei allen vier Tassen richtig zuordnet.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt der „Teekenner“ mindestens bei einer der vier Tassen daneben, falls er eine Treffsicherheit von 70 % hat?

6. Trigonometrie

(29) Gib die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tanges im rechtwinkligen Dreieck an (mit Skizze!).

(30) Bearbeite ohne den Taschenrechner:

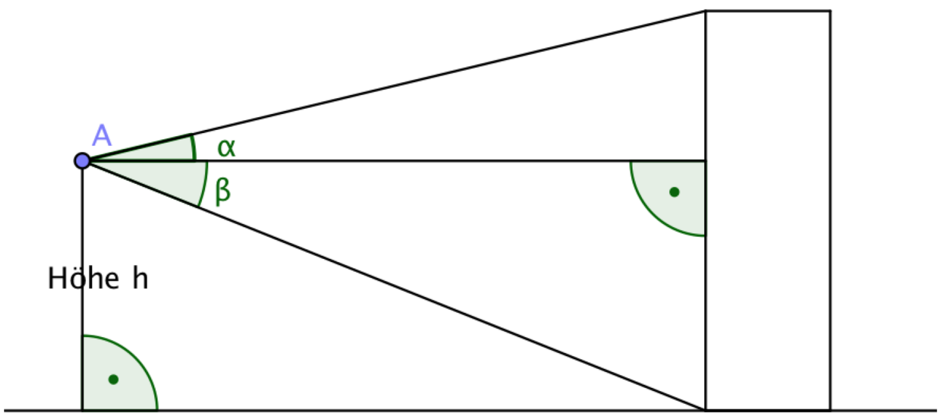
(a) Berechne mithilfe einer Skizze die Werte $\sin 30°$, $\cos 30°$ sowie $\tan 30°$.

(b) Es gilt $\cos\alpha = 0{,}2$. Berechne daraus $\sin\alpha$ und $\tan\alpha$.

(c) Erkläre mit der Skizze eines Dreiecks, dass gilt: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

(d) Es gilt $\tan\alpha = 5$. Berechne α, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$.

(31) Aus einem Hausfenster (Höhe h) sieht Anne die Spitze eines Turms unter dem Winkel α, die Basis unter dem Winkel β (siehe Skizze). Diese beiden Winkel kann sie messen.



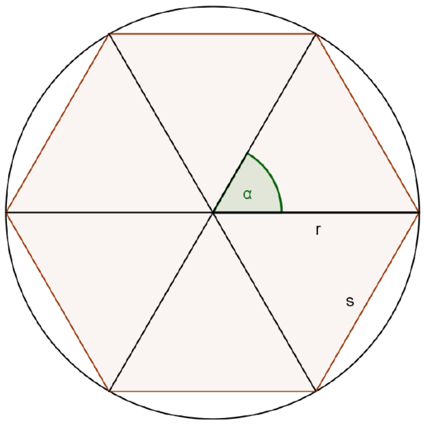
(a) Welche weitere Information bräuchte Anne, um die Turmhöhe zu bestimmen?

(b) Anne hat nun gemessen, dass gilt: $\alpha = 23°$, $\beta = 11°$. Sie selbst befindet sich auf einem Haus der Höhe $h = 15\,\text{m}$.

Bestimme daraus die Höhe des Turms und ihre Entfernung vom Turm.

(c) Wie groß sind die Winkel, falls Anne sich in einer Entfernung von 70 Metern vom Turm befindet und die Turmhöhe 45 Meter beträgt?

(32) Einem Kreis ($r = 5\,\text{cm}$) ist ein gleichseitiges Sechseck einbeschrieben:



(a) Bestimme den Winkel α sowie die Länge s.

(b) Im selben Kreis ist nun ein Zehneck einbeschrieben. Erstelle eine Skizze und berechne α sowie s für diese Situation.

7. Raumgeometrie

(33) Das Volumen eines $21\,\text{cm}$ hohen Zylinders beträgt 1,4 Liter. Bestimme daraus seinen Oberflächeninhalt.

(34) Die Grundfläche eines $12\,\text{cm}$ hohen Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Berechne den Oberflächeninhalt sowie das Volumen des Prismas

(a) für $a = 4\,\text{cm}$,

(b) für allgemeines a.

(c) Nun ist die Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck, mit der Schenkellänge a und der Basislänge $b = \frac{a}{2}$. Bestimme nun Oberflächeninhalt sowie Volumen.

(35) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge $4\,\text{cm}$ und Basislänge $3\,\text{cm}$. Dieses Dreieck soll nun eine Seitenfläche einer geraden Pyramide sein, deren Grundfläche quadratisch ist.

(a) Zeichne das vollständige Netz der Pyramide.

(b) Bestimme die Höhe der Pyramide.

(c) Bestimme das Volumen der Pyramide.