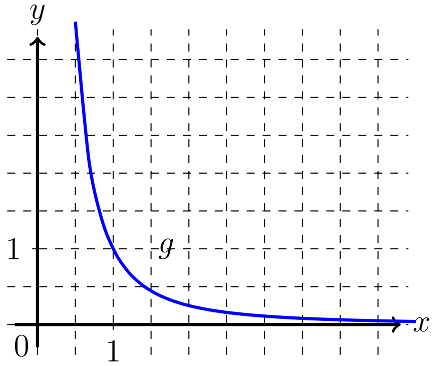
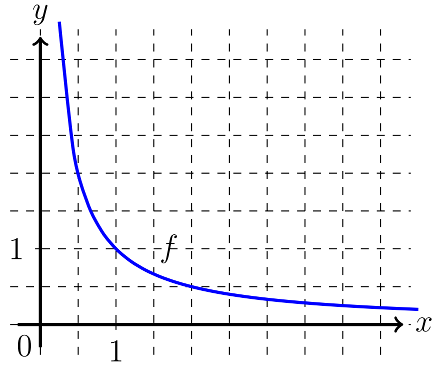
Grenzwertberechnungen bei Flächen - Lösung

Aufgabe 1. Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ und $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$:





a) siehe oben, z.B. $f(2) = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{4}$.

b) links: $A(a) = \int\limits_1^a \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}]_1^a = -\frac{1}{a} - (-\frac{1}{1}) = 1 - \frac{1}{a}$.

Also $\lim\limits_{a\to\infty} A(a) = 1$, der Flächeninhalt der (unendlich breiten) Fläche ist gleich 1.

rechts: $A(a) = \int\limits_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a$.

Also $\lim\limits_{a\to\infty} A(a) = +\infty$, d.h. der Flächeninhalt unter dem Graphen ist für $a \to \infty$ nicht endlich.

c) links: $F(b) = \int\limits_b^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}]_b^1 = -\frac{1}{1} - (-\frac{1}{b}) = \frac{1}{b} - 1$.

Also $\lim\limits_{b\to 0} F(b) = +\infty$, der Flächeninhalt der (unendlich hohen) Fläche ist unendlich.

rechts: $F(b) = \int\limits_b^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_b^1 = \ln 1 - (\ln b) = -\ln b$.

Also $\lim\limits_{b\to 0} F(b) = +\infty$, der Flächeninhalt der (unendlich hohen) Fläche ist unendlich (Das könnte man auch aufgrund von Symmetrie mit b) begründen).

Aufgabe 2.

a) $\lim\limits_{c\to\infty} \int\limits_0^c \frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} [-\frac{1}{\mathrm{e}^x}]_0^c = \lim\limits_{c\to\infty} (-\frac{1}{\mathrm{e}^c} - (-\frac{1}{\mathrm{e}^0})) = \lim\limits_{c\to\infty} (1 - \frac{1}{\mathrm{e}^c}) = 1$.

b) $\lim\limits_{c \overset{>}{\to} 0} \int\limits_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{c \overset{>}{\to} 0} \int\limits_c^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{c \overset{>}{\to} 0} [\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_c^1 = \lim\limits_{c \overset{>}{\to} 0} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim\limits_{c \overset{>}{\to} 0} [2 - 2\sqrt{c}] = 2$.

c) $\lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_0^c \frac{4}{2^x}\mathrm{d}x = 4 \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_0^c 2^{-x}\mathrm{d}x = 4 \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_0^c e^{\ln 2^{-x}}\mathrm{d}x = 4 \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_0^c e^{-x\ln 2}\mathrm{d}x = 4 \lim\limits_{c\to+\infty} [\frac{\mathrm{e}^{-x\ln 2}}{-\ln 2}]_0^c$

$= 4 \lim\limits_{c\to+\infty} [\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-c\ln 2}}{-\ln 2}}_{\to 0} - \frac{\mathrm{e}^{-0\ln 2}}{-\ln 2}] = \frac{4}{\ln 2}$.

Aufgabe 3.

a) $W = \int\limits_{h_1}^{h_2} G\frac{mM}{h^2}\mathrm{d}h = GmM \int\limits_{R}^{R+100\,\mathrm{km}} \frac{1}{h^2}\mathrm{d}h = GmM[-\frac{1}{h}]_R^{R+100\,\mathrm{km}}$
$= GmM[-\frac{1}{R+100\,\mathrm{km}} - (-\frac{1}{R})] = 0,97\,\mathrm{MJ}$ (Vorsicht: Länge in m angeben!).

b) Geben Sie an, was der Term $\lim\limits_{h_2\to\infty} \int\limits_{R}^{h_2} G\frac{mM}{h^2}\mathrm{d}h$ bedeutet und bestimmen Sie seinen Wert!

Das ist die Arbeit, die nötig ist, um einen Körper der Masse m ganz aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen.

Es ergibt sich $\lim\limits_{h_2\to\infty} \int\limits_{R}^{h_2} G\frac{mM}{h^2}\mathrm{d}h = GmM \lim\limits_{h_2\to\infty} [-\frac{1}{h_2} - (-\frac{1}{R})] = \frac{GmM}{R}$.

Für $m = 1\,\mathrm{kg}$ ergibt sich der Wert $W = 63\,\mathrm{MJ}$.