Zusammenfassung zur Analysis Q11/12

1. Untersuchung von $f(x)$

- $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{$Nullstellen des Nenners / Radikand negativ / Logarithmus-Argument ≤ 0$\}$
- Symmetrie
  - Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$ (bei ganzrat. Fkt. nur ungerade Exp.)
  - Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$ (bei ganzrat. Fkt. nur gerade Exp.)
  - Gebrochen rationale Fkt.: $\frac{AS}{AS} = AS$, $\frac{PS}{PS} = AS$, $\frac{AS}{PS} = PS$, $\frac{PS}{AS} = PS$
- Verhalten am Rand der Def.menge: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\pm x_0} f(x)$ (Def.lücken x_0)
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|f(0))$
- Schnittpunkte mit der x-Achse bzw. Nullstellen: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; N_1(x_1|0)$ bzw. $x_1 = 0$
  - gerade Vfh, kein VZW $\Rightarrow$ Berührpunkt
  - ungerade Vfh, VZW $\Rightarrow$ Schnittpunkt
  - Zweiter Grad: $ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow$ Lösungsformel / Vieta bei normierter Form
  - Höherer Grad: Erkennen: $x^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1;\; x_2 = 1$
    Probieren, Pol.div: $(x^3 - 4x^2 + 8x - 5):(x-1) = x^2 - 3x + 5$

2. Gebrochen rationale Funktionen:

- Polstellen als Stellen, an denen der Nenner 0 ist, also Definitionslücke.
  - Falls gleichzeitig Nullst. des Zählers mit mind. gleichem Grad, dann hebbar → „Loch“
  - Ansonsten senkrechte Asymptote
- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs: h-Methode / große Werte einsetzen / DENKEN
- Asymptoten bei Zählergrad z und Nennergrad n:
  - $z < n$: $y = 0$, also x-Achse als waagerechte Asymptote
  - $z = n$: $y = \frac{a_n}{b_n}$, waagerechte A. (Quotienten der Koeffizienten der höchsten x-Potenzen)
  - $z = n + 1$: $y = mx + t$ als schräge Asymptote (ermitteln durch Polynomdivision)

3. Ableitungsregeln:

- $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$ $\quad [a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$ $\quad [f(x) + a]' = f'(x)$ $\quad [ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$ $\quad [cos(x)]' = -\sin(x)$ $\quad [e^x]' = e^x$ $\quad [e^{ax}]' = ae^{ax}$ $\quad [a^x]' = ln a \cdot a^x$
- Produktregel: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $\frac{N\,aZ - Z\,aN}{N^2}$
- Kettenregel: $[f(xg(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4. Untersuchung von $f'(x)$

- Steigung der Tangente/der Funktion in x_0: $m = f'(x_0)$, mit $\tan\alpha = m$
- Punkte mit waagerechter Tangente: x-Koordinaten aus den Lösungen von $f'(x) = 0$
- Monotonieverhalten
  - $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; G_f$ ist sms $\qquad f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; G_f$ ist smf
  - Änderung des Verhaltens von zunehmend auf abnehmend: HOP
  - Änderung des Verhaltens von abnehmend auf zunehmend: TIP
  - kein VZW von $f'(x)$ → kein Extremum sondern TeP

5. Untersuchung von $f''(x)$

- Extremum bei x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
  - Lokales Minimum, wenn Wechsel smf → sms oder $f''(x) > 0$, $E(x_0|f(x_0))$
  - Lokales Maximum, wenn Wechsel sms → smf oder $f''(x) < 0$, $E(x_0|f(x_0))$

- Krümmungsverhalten: $f''(x) > 0$ → linksgekrümmt ↺
  $f''(x) < 0$ → rechtsgekrümmt ↷
- Wendepunkt (relativ zur Umgebung steilster/flachster Verlauf) bei x_0 wenn:
  - $f''(x_0) = 0$
  - VZW bei $f''(x_0)$ oder $f'''(x_0) \neq 0$
  - Zusätzlich TeP – also WP mit waagerechter Tangente – wenn $f'(x_0) = 0$

6. Weitere Formeln:

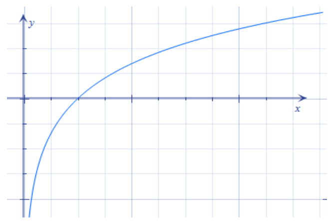
- Allgemeine Form der Tangente: $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
- Allgemeiner Schnittwinkel zweier Graphen: $\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$
- Zwei Graphen senkrecht aufeinander: $m_1 \cdot m_2 = -1$ speziell $m_T \cdot m_N = -1$
- Scheitelform einer Parabel: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ Scheitelkoordinaten: $S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$

7. Allgemeines zu Stammfunktion, Integralfunktion etc.

- $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$
- Eine Integralfunktion ist eine Stammfunktion mit einer Nullstelle
- $F(x) = \int_a^x f(s)ds$ ist diejenige Stammfunktion mit $F(a) = 0$ und somit eine Integralfunktion
- Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\qquad \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\qquad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

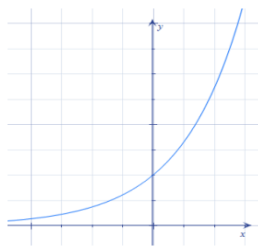
8. Die Logarithmusfunktion

- $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad \ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$



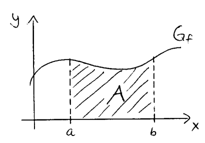
9. Die Exponentialfunktion

- $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0^+$ $\qquad e^0 = 1$
- $\int a \cdot e^{bx}\, dx = \frac{a}{b} e^{bx} + C$
- $a^x = e^{x \cdot \ln a}$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$

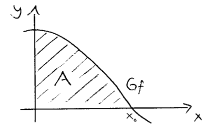


10. Flächenberechnungen

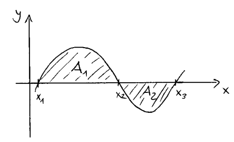
- Fläche $A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, mit $F(x)$ bel. Stammfkt. von $f(x)$



- Fläche von G_f und den Koordinatenachsen eingeschlossen: $A = \int_0^{x_0} f(x)dx$ mit x_0 als vorher zu bestimmende Nullstelle



- Fläche von G_f und der x-Achse eingeschlossen: $A = A_1 + A_2$ mit x_1, x_2, x_3 Nullstellen von f. $A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ und $A_2 = \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right|$



- Fläche von G_f und G_g eingeschlossen: $A = \left|\int_{x_1}^{x_2} h(x)dx\right|$ mit x_1, x_2 als Schnittstellen von f und g (Funktionen gleichsetzen), $h(x)$ Differenzfkt.