Lösungen

1) $f'(x) = 8x^3 + 9x^2 = x^2(8x + 9)$. Die Ableitung von f besitzt eine (doppelte) NST ohne Vorzeichenwechsel (=VZW) bei $x = 0$, hier liegt keine Extremstelle, sondern Stelle eines Terassenpunktes von G_f vor.
$x = -\frac{9}{8}$ ist eine (einfache) NST mit VZW von f', also liegt hier eine Extremstelle von f vor.

2)

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 3 \cdot (x-1)(x-3)$
Es liegen zwei NST von f' mit VZW vor.

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	x>3
f'(x)	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
f	s.m.zunehmend	besitzt Max.	s.m.abnehmend	besitzt Min.	s.m.zunehmend
G_f	↗	$HP\ (1 \vert -3)$	↘	$TiP(3 \vert -7)$	↗

b. $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1 = (-3) \cdot (x+1) \cdot (x - \frac{1}{3})$
Es liegen zwei NST von f' mit VZW vor.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
f'(x)	< 0	$= 0$	> 0	$= 0$	< 0
f	s.m.abnehmend	besitzt Min.	s.m.zunehmend	besitzt Max.	s.m.abnehmend
G_f	↘	$TiP\ (-1 \vert -4)$	↗	$HP\left(\frac{1}{3} \vert -7\right)$	↘

c. $f'(x) = 2x^4 - 2x^3 - 12x^2 = 2x^2 \cdot (x^2 - x - 6) = 2x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)$
Es liegen zwei einfache NST von f' mit VZW und eine doppelte NST ($x = 0$) von f' ohne VZW vor.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f'(x)	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
f	s.m.zunehmend	besitzt Max.	s.m.abnehmend		s.m.abnehmend	besitzt Min.	s.m.zunehmend
G_f	↗	$HP\ (-2 \vert 11{,}2)$	↘	$TeP(0 \vert 0)$	↘	$TiP(3 \vert -51{,}3)$	↗

d.

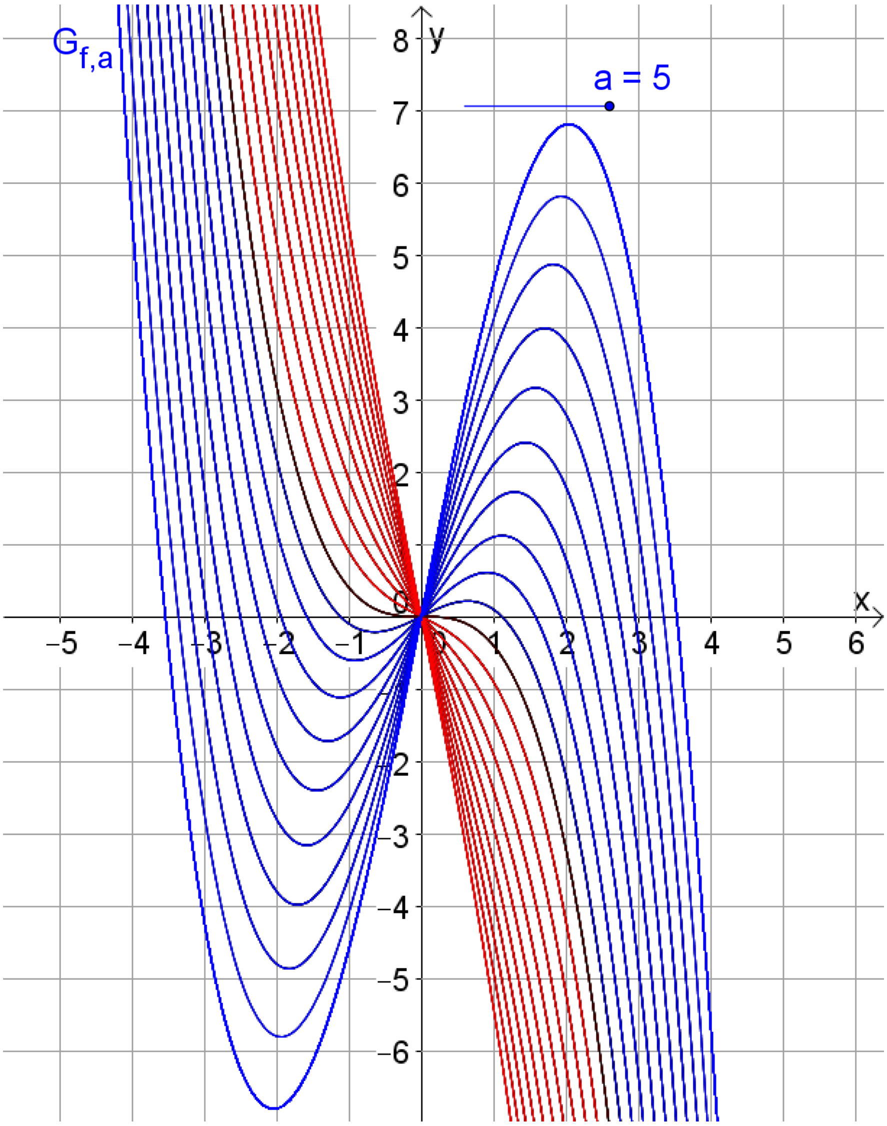
3) $f'(x) = -1{,}2\,x^2 + a\,,\, f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{10}{12}a$ → Für negative a besitzt die Gleichung keine Lösung. Für nichtnegative a: Radizieren: $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{6}a},\; x_2 = +\sqrt{\frac{5}{6}a}$.
Für negative a besitzt f' keine NST und damit f kein G_f keine waagrechten Tangenten(und somit auch

keine Extrempunkte).

Für $a = 0$ besitzt f' eine doppelte NST (x=0) ohne VZW, G_f besitzt dort eine waagrechte Tangente. Es liegt dort kein Extrempunkt, sondern eine Terrassenpunkt von G_f vor.

Für positive a besitzt G_f zwei waagrechte Tangenten an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{6}a},\ x_2 = +\sqrt{\frac{5}{6}a}$.

Da f eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit negativem Koeffizienten vor der dritten Potenz von x ist, verläuft ihr Graph von links oben kommend nach rechts unten. x_1 ist deshalb Stelle eines Tiefpunktes, x_2 Stelle eines Hochpunktes von G_f.



Gezeigt sind einige Graphen der Schar G_{f_a} für Parameterwerte $-5 < a < 5$. Für negative a sind die Graphen rot eingefärbt (keine waagrechte Tangente), für $a = 0$ schwarz (eine waagrechte Tangente, Terrassenpunkt ist $TeP(0|0)$, für positive a sind die Graphen blau eingefärbt (zwei waagrechte Tangenten, jeweils ein Tip und ein HP).