Bestimme Lage und Art der Definitionslücken sowie Nullstellen – Lösung

1) $f(x)=\frac{4x-5}{(x-4)^2}$, $D=R\setminus\{4\}$, Polstelle mit VZW bei $\underline{\underline{x=4}}$, Nullstelle bei $\underline{\underline{x=\frac{5}{4}}}$

2) $f(x)=\frac{x(3-x)}{(3-x)(3+x)}=\frac{x}{3+x}$; $D=R\setminus\{3;\,-3\}$, Nullstelle bei $\underline{\underline{x=0}}$

Polstelle mit VZW bei $\underline{\underline{x=-3}}$

Hebbare Definitionslücke bei $\underline{\underline{x=3}}$

3) $f(x)=\frac{(1+x)(1-x)}{1+x^2}$; $D=R$, Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1=1}}$ und $\underline{\underline{x_2=-1}}$, keine Polstellen

4) $f(x)=\frac{5x(2x+3)}{x(2x+3)(2x-3)}=\frac{5}{(2x-3)}$; $D=R\setminus\{0;\,-1{,}5;\,1{,}5\}$,

Polstelle mit VZW bei $\underline{\underline{x=1{,}5}}$

Hebbare Definitionslücken bei $\underline{\underline{x=-1{,}5}}$, $\underline{\underline{x=0}}$

5) $f(x)=\frac{x(3x-5)}{(x+3)(x-1)}$; $D=R\setminus\{-3;\,1\}$, Polstellen mit VZW bei $\underline{\underline{x_1=1}}$, $\underline{\underline{x_2=-3}}$

Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1=0}}$ und $\underline{\underline{x_2=\frac{5}{3}}}$,

6) $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{(x+1)(x-1)}=-\frac{x^2}{x+1}$; $D=R\setminus\{1;\,-1\}$,

Polstelle mit VZW bei $\underline{\underline{x=-1}}$

Hebbare Definitionslücke bei $\underline{\underline{x=1}}$

Doppelte Nullstelle (=Berührpunkt) bei $\underline{\underline{x=0}}$

7) $f(x)=\frac{(x-6)(x-1)}{x^2\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}$; $D=R\setminus\left\{0;\ \sqrt{5};-\sqrt{5}\right\}$,

Polstelle ohne VZW bei $\underline{\underline{x=0}}$

Polstellen mit VZW bei $\underline{\underline{x_1=\sqrt{5}}}$, $\underline{\underline{x_2=-\sqrt{5}}}$

Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1=1}}$ und $\underline{\underline{x_2=6}}$,

8) $f(x)=\frac{x^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot x\cdot(x-5)^2}=\frac{x\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x-\sqrt{3}\right)(x-5)^2}$

$D=R\setminus\left\{0;\ 5;\ \sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$,

Polstelle ohne VZW bei $\underline{\underline{x=5}}$

Polstellen mit VZW bei $\underline{\underline{x=\sqrt{3}}}$,

Hebbare Definitionslücke bei $\underline{\underline{x=-\sqrt{3}}}$ und bei $\underline{\underline{x=0}}$.

Das „Loch im Graphen“ bei $\underline{\underline{x=0}}$ liegt genau auf der x-Achse, da die gekürzte Funktion genau hier eine Definitionslücke hätte.