Aufgabe 1 (Spiegeln). Gib zu der Funktion f jeweils die Funktionsterme von g an, deren Graphen durch Spiegelung von G_f an der x-Achse, bzw. die Funktionsterme von h an, deren Graphen durch Spiegelung von G_f an der y-Achse entstehen.

a)

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(x) = -3^x \\ h(x) &= f(-x) = 3^{-x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(x) = -\cos(x) \\ h(x) &= f(-x) = \cos(-x) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(x) = -\frac{x}{x-4} \\ h(x) &= f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)-4} = \frac{-x}{-(x+4)} = \frac{x}{x+4} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(x) = -(x^3 + 2x^2 - 4x + 2) = -x^3 - 2x^2 + 4x - 2 \\ h(x) &= f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 2 = -x^3 + 2x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Strecken). Gib zu der Funktion f jeweils die Funktionsterme von g an, deren Graphen durch Streckung von G_f um den Faktor 2 an der x-Achse, bzw. die Funktionsterme von h an, deren Graphen durch Streckung von G_f um 2 an der y-Achse entstehen.

a)

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 3^{\frac{x}{2}} \\ h(x) &= 2 \cdot f(x) = 2 \cdot 3^x \qquad \textbf{Vorsicht: } \text{Das ist nicht gleich } 6^x = 2^x \cdot 3^x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ h(x) &= 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x - 4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{\frac{1}{2}(x-8)} = \frac{x}{x-8} \\ h(x) &= 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{2x}{x-4} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{1}{8} \cdot x^3 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 2 \\ &= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \\ h(x) &= 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \left(x^3 + 2x^2 - 4x + 2\right) \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 8x + 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Gebrochen-rationale Funktion). Streckung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ in x-Richtung:

$$g_1(x) = f\left(\frac{3}{4} \cdot x\right) = \frac{2}{4 \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) - 5} = \frac{2}{3x - 5}$$

Anschließend Verschiebung um -3 in y-Richtung:

$$g(x) = g_1(x) - 3 = \frac{2}{3x-5} - 3 = \frac{2}{3x-5} - \frac{3(3x-5)}{3x-5} = \frac{2 - 9x + 15}{3x-5} = \frac{17-9x}{3x-5}$$

Aufgabe 4 (Funktionsgraphen Funktionsterme zuordnen).

a) Beide Graphen lassen sich aus dem Graphen von $f(x)$ sowohl durch Streckung in x- als auch in y-Richtung erhalten. Der gepunktete Graph geht aus G_f durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung hervor, also ist $g_1(x) = 2 \cdot x^2$ eine Lösung.

Überlegt man sich nun, welcher Streckungsfaktor in x-Richtung den gleichen Einfluss haben würde, so erhält man eine weitere Lösungsmöglichkeit $g_2(x) = (\sqrt{2} \cdot x)^2$. Die folgende Umrechung zeigt leicht, dass beide Funktionsterme gleichwertig sind:

$$g_2(x) = \left(\sqrt{2} \cdot x\right)^2 = \sqrt{2}^2 \cdot x^2 = 2 \cdot x^2 = g_1(x)$$

> **Vorsicht:** Diese Besonderheit gilt nur für einige wenige Funktionen. Du kannst leicht überprüfen, dass für die Funktion $f_1(x) = x^2 + x$, oder die Funktion $f_2(x) = \sin(x)$ eine Streckung in x- und y-Richtung nie zu den selben Funktionsgraphen führen kann.
>
> **Überlege:** Was muss für den Funktionsterm einer Funktion f gelten, damit – wie in unserem Fall – die Graphen durch Streckung in x- und y-Richtung überhaupt deckungsgleich werden können?

Analog erhält man zum gestrichelten Graphen die zugehörigen Funktionsterme

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2, \qquad \text{bzw.} \qquad h_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x\right)^2$$

b) Der gepunktete Graph geht aus dem Graphen von f hervor, wenn man diesen zunächst an der x-Achse spiegelt und anschließend um den Faktor 2 in y-Richtung streckt. Der Funktionsterm ist also

$$g(x) = -2 \cdot f(x) = -2\sin(x)$$

Um aus G_f den gestrichelten Graphen zu erhalten, muss dieser die x-Werte doppelt so schnell durchlaufen, also um den Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt werden. Das führt zum Funktionsterm

$$h(x) = \sin(2x)$$