

10. Klasse: Lösung Rotationskörper

$$\begin{aligned}
 1. \quad V &= V_{KegelGro\beta} - V_{KegelMittel} - 2 \cdot V_{KegelKlein} \\
 &= \frac{1}{3} r_g^2 \pi h_g - \frac{1}{3} r_m^2 \pi h_m - 2 \cdot \frac{1}{3} r_k^2 \pi h_k \\
 &= \frac{1}{3} \pi \cdot ((4cm)^2 \cdot 8cm - (4cm)^2 \cdot 4cm - 2 \cdot (1cm)^2 \cdot 2cm) \\
 &= \underline{\underline{62,83cm^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad V &= V_{Halbkugel} + V_{Kegel} - V_{Zylinder} \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \pi + \frac{1}{3} a^2 \pi a - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi a \\
 &= a^3 \pi - \frac{a^3 \pi}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4} a^3 \pi}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad V &= V_{Halbkugel} + V_{Kegel} - V_{HalbkugelKlein} - V_{KegelKlein} \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \pi + \frac{1}{3} a^2 \pi a - \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \frac{a}{2} \\
 &= a^3 \pi - \left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi = \underline{\underline{\frac{7}{8} a^3 \pi}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad V &= a^2 \pi a + a^2 \pi \frac{a}{2} + a^2 \pi \frac{a}{4} + a^2 \pi \frac{a}{8} + a^2 \pi \frac{a}{16} + \dots \\
 &= a^3 \pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
 &= \underline{\underline{2a^3 \pi}}
 \end{aligned}$$

Bei 5. und 6. jeweils an die Herleitung für das Kugelvolumen denken (Cavalieri-Prinzip: Halbkugel = Zylinder - Kegel).

$$\begin{aligned}
 5. \quad V &= V_{Halbkugel} + V_{Zylinder} - V_{Kegel} \\
 &= \frac{2}{3} r^3 \pi + r^2 \pi \frac{r}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi \frac{r}{2} \\
 &= \underline{\underline{\frac{9}{8} r^3 \pi}}
 \end{aligned}$$

Bei 6. wird zuerst das Schraffierte bis zur Drehachse berechnet (erst oberer, dann unterer Teil), anschließend der Zylinder mit Radius $a/2$ und Höhe $2/3a$ abgezogen.

$$\begin{aligned}
 6. \quad V &= V_{Zylinder} - V_{Kegel} \text{ (unterer Streifen)} + V_{Kegel} - V_{KegelKlein} \text{ (oberer)} - V_{Zylinder} \\
 &= a^2 \pi \frac{a}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{3}\right)^2 \pi \frac{a}{3} + \frac{1}{3} a^2 \pi a - \frac{1}{3} \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \pi \frac{2a}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \frac{2a}{3} \\
 &= a^3 \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{3} - \frac{8}{81} - \frac{2}{12}\right) \\
 &= \underline{\underline{\frac{7}{18} a^3 \pi}}
 \end{aligned}$$