Grenzwerte - Lösung

1. Aufgabe

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(0{,}75x^5+5x^3-32x^2+71\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^5\left(0{,}75+\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{32}{x^3}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{71}{x^5}}_{\to 0}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^5\cdot 0{,}75\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(0{,}75x^5+5x^3-32x^2+71\right)$$

s.o.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot 0{,}75\right)=-\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{301}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\overbrace{\frac{301}{x}}^{\to 0}}{1}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{301}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\overbrace{\frac{301}{x}}^{\to 0}}{1}\right)=0$$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{541+\frac{2}{3}x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\overbrace{\frac{541}{x^2}}^{\to 0}+\frac{2}{3}}{1}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{541+\frac{2}{3}x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\overbrace{\frac{541}{x^2}}^{\to 0}+\frac{2}{3}}{1}\right)=\frac{2}{3}$$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4-x^3+1}{x^3+2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0}}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4-x^3+1}{x^3+2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to -0}+\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to -0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to -0}}\right)=-\infty$$

e) $\lim_{x \to \pm\infty} \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

Es gibt keinen Grenzwert.
Die Funktionswerte schwanken
zwischen -1 und 1.

f) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

Tipp: Funktion plotten oder
untersuchen

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{\sin(2x)}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Symmetrie : $\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{\sin(2x)}{x}\right) = 0$

2. Aufgabe

$$g(x) = \frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x}$$

Der Graph von g ist punktsymmetrisch
bzgl. des Koordinatenursprungs
und es gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\overset{\to 0}{\frac{4}{x}}}{1}\right) = 0$$

$$|g(x)| = \left|\frac{4}{x}\right| = 0{,}2 \Rightarrow x = \frac{4}{0{,}2} = 20$$
und $x = -20$

$\Rightarrow$ $x < -20$ und $x > 20$ sind die
Funktionswerte weniger als 0,2
entfernt.

$$\left|\frac{4}{x}\right| = 0{,}02 \Rightarrow x = \frac{4}{0{,}02} = 200$$
und $x = -200$

$\Rightarrow$ für $x < -200$ und $x > 200$ sind die
Funktionswerte weniger als 0,02 entfernt

analog: für $x < -2000$ und $x > 2000$ sind die Funktionswerte weniger als 0,002 entfernt.

" : für $x < -20.000$ und $x > 20.000$ sind die Funktionswerte weniger als 0,0002 entfernt.

3. Aufgabe

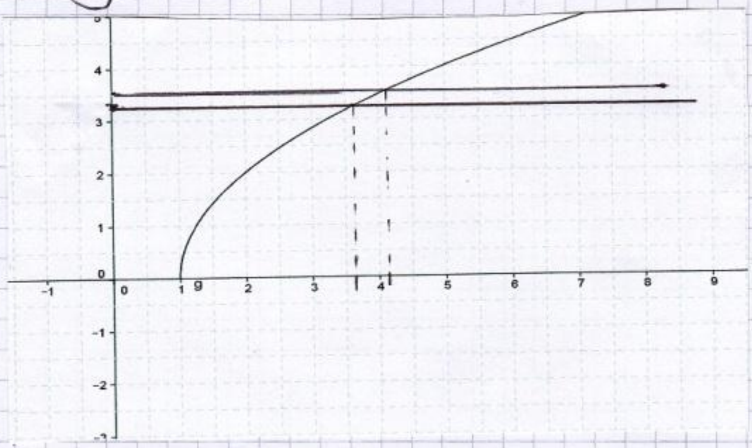
$$\lim_{x \to \infty} \left(5 - \frac{4}{x+1}\right) = 5$$

da $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 0$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = 5$

4. Aufgabe

a)



$[3{,}6 ; 4{,}1]$

b) Der Graph könnte:

1. sich beliebig genau einem Wert z.B. 8 annähern
2. auch gegen ∞ gehen.

(keine konkrete Aussage möglich,

da man zu wenig Informationen über das Steigungsverhalten hat.

*** Aufgabe**

a) Funktion verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die Funktion $x \mapsto \frac{1}{20}x^4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} v(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} 5^x = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} w(x) = -\infty$ (da „$-0{,}25 \cdot \infty$")

$\lim\limits_{x \to -\infty} w(x) = 0$