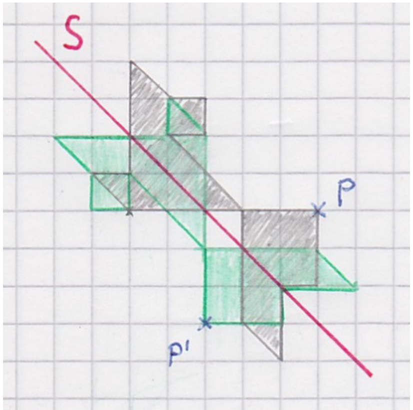
Lösungen Crashkurs – 7. Jahrgangsstufe

I. Symmetrie und Grundkonstruktionen

1. 

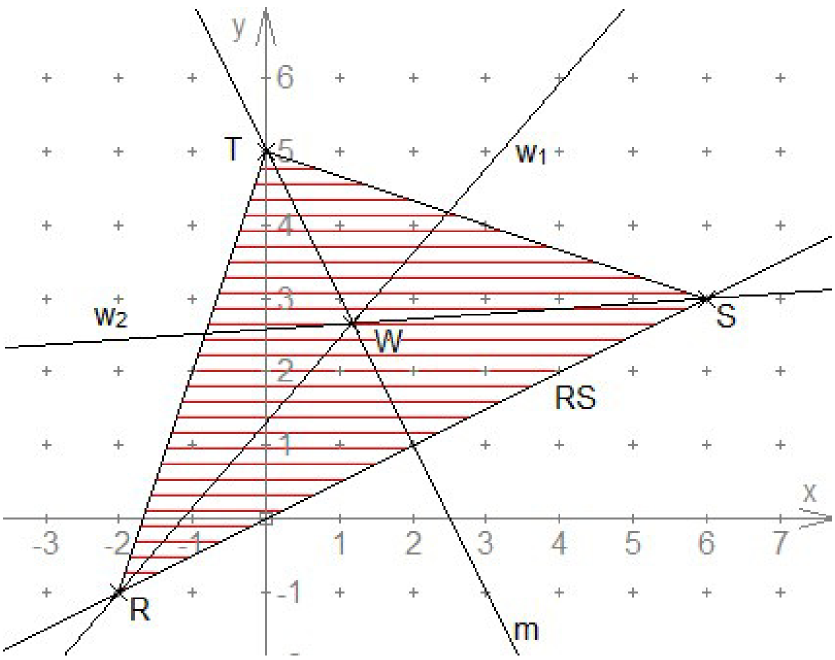
2. Jede Raute hat die Eigenschaften: a, b, d, e, g.

3. Der gesuchte Treffpunkt befindet sich dort, wo die Mittelsenkrechte der Strecke $[PQ]$ den Fluss trifft.

4. Jedes Trapez hat die Eigenschaften: b, d, e, f.

5. Ohne Lösungsskizze.
   a) Kontrolle durch Messen: $\alpha^* = 159°$
   b) Kontrolle durch Messen: $s^* \approx 6{,}9cm$
   c) Individuelle Lösungen.

6. a) $T(0|5)$
   b) $W(1{,}2|2{,}7)$



c) Summieren zweier Dreiecksflächen mit gemeinsamer Grundseite $[OT]$ und jeweiliger Höhe. Alternativ die Grundseite $[RS]$ und die zugehörige Höhe abmessen.

Fläche im II.Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot 5cm \cdot 1{,}7cm \approx 4{,}25cm^2$

Gesamtfläche: $20cm^2$

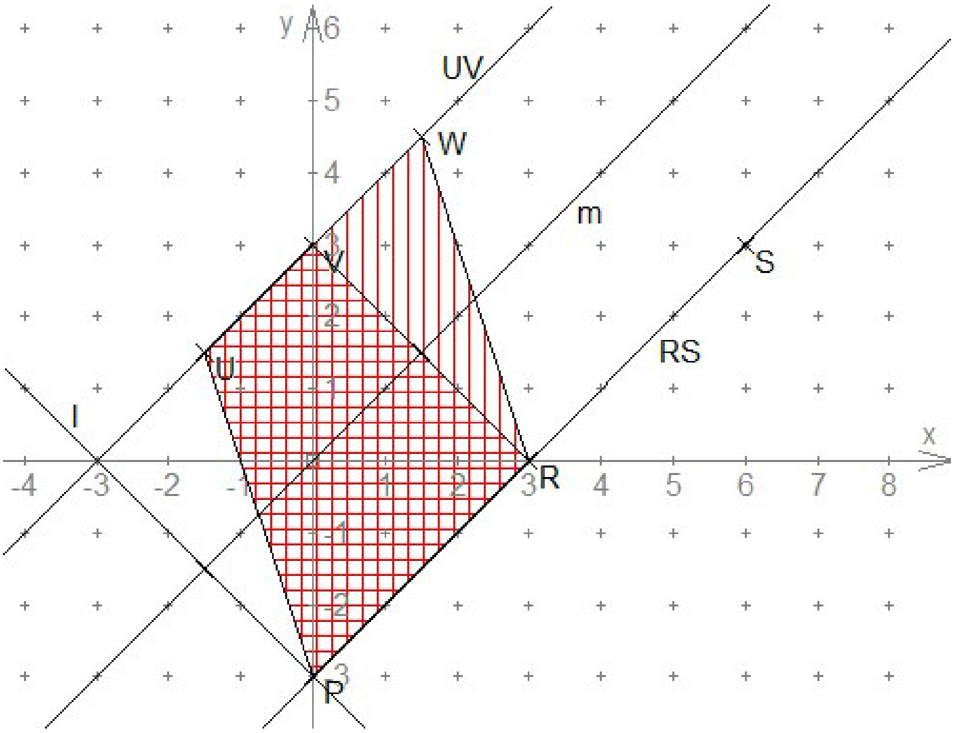
Bruchteil: $\frac{4{,}25}{20} = \underline{\frac{17}{80}}$

7. a) $A(0|0), B(1|1), C(2|2)$

b) $d(UV, RS) \approx 4{,}2cm$

c) $A_{PRVU} = A_{\Delta PRV} + A_{\Delta PVU} = \frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 3cm + \frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 1{,}5cm = \underline{13{,}5cm^2}$

$A_{PRWU} = 2 \cdot A_{PRV} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 3cm = \underline{185cm^2}$



II. Winkelbetrachtungen

8. a) Wäre α der 90°-Winkel, dann gälte: $\beta = 180°$ und damit $\alpha + \beta = 270° > 180°$, was die Winkelsumme im Dreieck wäre.

b) 1) $\beta = 90°, \alpha = 45°, \gamma = 45°$.

2) $\gamma = 90°, \beta = 60°, \alpha = 30°$.

9. a) Es muss gelten: $\alpha + \beta < 90°$. Denn dann gilt: $\alpha^* + \beta^* < 180°$.

b) Es gilt: $\alpha + \beta > \alpha^* + \beta^* \;\Rightarrow\; \gamma^* < \gamma$

c) $\gamma^* = 180° - (\alpha^* + \beta^*) = 180° - (2\alpha + 2\beta)$

10. Alle vier Winkel ergeben 360°. D.h. die Größe des einen Winkels beträgt 120°. Der gegenüberliegende Winkel ist damit bei einem Parallelogramm ebenfalls 120° groß. Die anderen beiden Winkel müssen dann jeweils 60° groß sein, was möglich ist.

11. a) Nebenwinkel b) Scheitelwinkel c) Wechselwinkel

12. $\gamma_3 = \gamma = 52°$ (Scheitelwinkel)

$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 128°$ (Nebenwinkel)

$\varphi = 180° - (\alpha + \gamma_3) = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\beta_2 = \gamma = 52°$ (Stufenwinkel)

$\beta_3 = \beta_2 = 52°$ (Scheitelwinkel)

$\beta_4 = 180° - (\beta + \beta_2) = 27°$ (gestreckter Winkel)

$\lambda = \varphi = 60°$ (Stufenwinkel) oder $\lambda = 180° - (\alpha + \beta_3) = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\delta = 180° - \lambda = 120°$ (Nebenwinkel)

$\mu = 180° - (\delta + \beta_4) = 33°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\omega = 360° - (\varphi + \gamma_3 + \beta) = 147°$ (Winkelsumme im Viereck) oder Nebenwinkel zu μ

$\psi = 180° - (\beta + \gamma_3) = 27°$ (Winkelsumme im Dreieck) oder Wechselwinkel zu β_4

$\varepsilon = 180° - \psi = 153°$ (Nebenwinkel)

III. Terme und Termumformungen

13. a)

1	-1,75	-3	$-1\frac{2}{9}$	6	10,25

b)

-3,5	0	0	-0,5	-13	-42,5

14. $\left[8{,}5x - \left(\frac{1}{3}y - 3\frac{1}{3}x\right)\right] + 5{,}5y - \left[4{,}5x - \left(2\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y\right)\right] =$

$= \left[8{,}5x - \frac{1}{3}y + 3\frac{1}{3}x\right] + 5{,}5y - \left[4{,}5x - 2\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y\right] =$

$= 8{,}5x - \frac{1}{3}y + 3\frac{1}{3}x + 5{,}5y - 4{,}5x + 2\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y =$

$= 3\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}x + 5{,}5y + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}y = 6x + 5{,}5y - \frac{1}{6}y = \boldsymbol{6x + 5\frac{1}{3}y}$

15. a) $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 - [(-2x)^3 \cdot y^3] - 2\frac{1}{3}x^6y^3 - (-2xy)^3 = \frac{8}{27}x^6y^3 + 8x^3y^3 - \frac{7}{3}x^6y^3 + 8x^3y^3 =$

$= \boldsymbol{-\frac{55}{27}x^6y^3 + 16x^3y^3}$

b) $(2a + 3b)^2 + (2a - 3b)^2 - (2a + 3b)(2a - 3b) =$

$= 4a^2 + 12ab + 9b^2 + 4a^2 - 12ab + 9b^2 - 4a^2 + 9b^2 = \boldsymbol{4a^2 + 27b^2}$

16. a) $V = 4x \cdot 6x \cdot 1{,}5x = \mathbf{36x^3}$

b) $A = 2 \cdot (4x \cdot 6x + 1{,}5x \cdot 6x + 4x \cdot 1{,}5x) = 2 \cdot (24x^2 + 9x^2 + 6x^2) = 2 \cdot 39x^2 = \mathbf{78x^2}$

c) $V(2{,}5m) = 36 \cdot (2{,}5m)^3 = \mathbf{562{,}5m^3}$

$A(2{,}5m) = 78 \cdot (2{,}5m)^2 = \mathbf{487{,}5m^2}$

17. a) $x^2 + 17$ Summe.

b) $3n \cdot (n+1)$ Produkt.

c) $x \cdot y - (x + y)$ Differenz.

d) $(x + x^2): 16^2$ Quotient

18. a) $V(x) = x \cdot \frac{1}{5}x \cdot \frac{2}{5}x + 1{,}1x \cdot \frac{1}{5}x \cdot \frac{2}{5}x = 2{,}1x \cdot \frac{1}{5}x \cdot \frac{2}{5}x = \underline{\mathbf{1\frac{17}{25}x^3}}$

b) $m = \varrho \cdot V = 19{,}3\frac{g}{cm^3} \cdot \frac{42}{25} \cdot (1{,}5cm)^3 = 109{,}431g \approx \underline{\mathbf{109g}}$

19. a) Die beiden weißen Dreiecke kann man zusammensetzen und erhält ein Viertel des Quadrats. Also ist die grüne Fläche $\mathbf{0{,}75a^2}$.

b) Es ist ein Quadrat mit Seitenlänge $1{,}5a$, also ist es $\mathbf{2{,}25a^2}$ nachdem $1{,}5^2 = 2{,}25$.

c) Die beiden grünen Dreiecke lassen sich zu einem Viertel des Quadrats zusammensetzen. Die Fläche des Quadrats beträgt $0{,}5a^2$, der gesuchte Term ein Viertel davon, also $\mathbf{0{,}125a^2}$.

20. a) $T_1(x) = \frac{36}{37}$ b) $T_2(y) = -\frac{6}{5}$ c) $T_3(z) = 0$ → $\mathbf{-\frac{6}{5} < 0 < \frac{36}{37}}$

21. a) $11x - 19$ b) $30a - 64$ c) $\frac{2}{3}a$ d) 0

22. a) $wahr$ b) $wahr$ c) $falsch$ d) $wahr$

IV. Lösen von Gleichungen

23. a) Addition oder Subtraktion eines Terms oder einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.

Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit einer Zahl ungleich Null oder Division beider Seiten der Gleichung durch eine Zahl ungleich 0.

b) $x = -1\frac{2}{5}$ oder z.B. $x - 1 = -2\frac{2}{5}$

24. a) Gesuchte Zahl: x

Gleichung: $18.5 - 3x = 4.5x + \frac{7}{2}$ → $\mathbf{x = 2}$

b) Alter der Mutter: m

Gleichung: $127 = m + \frac{1}{2}m + (m-3) + \left(\frac{1}{2}m - 2\right) \;\rightarrow\; \boldsymbol{m = 42}$

D.h. Alter der Mutter ist **42**, des Vaters **45**, des jüngeren Kindes **19**, des älteren **21**.

c) Rechtecksbreite: b

Gleichung: $b \cdot 5b + 16 = (b+2)(5b+2) \;\rightarrow\; \boldsymbol{b = 1}$

D.h. die **Breite** beträgt **1cm**, die **Länge 5cm.**

d) Eine Seite: a, die andere Seite: $a + 8{,}2$

Gleichung: $2a + 2 \cdot (a + 8{,}2) = 45{,}6 \;\rightarrow\; \boldsymbol{a = 7{,}3cm,\; b = 15{,}5cm}$

25. Am Anfang: Anna hat $2x$ Chips, Bert hat x Chips.

Danach: Anna hat $(2x - 11)$ Chips, Bert hat $(x + 11)$ Chips.

Gleichung: $2x - 11 = x + 11 - 8 \;\rightarrow\; x = 14$. Anfangs hatte Berti 11 Chips.

26. a) $L = \left\{-7\frac{6}{7}\right\}$ b) $L = \left\{2\frac{1}{3}\right\}$ c) $L = \{16\}$

d) $L = \{\ \}$ e) $L = \left\{-1\frac{5}{6}\right\}$ f) $L = \{0\}$

27. $x = -\frac{9}{2}$

Setzt man $x = 0$ ein, ergibt sich: $-6 = -60$. Das ist falsch, weshalb $x = 0$ keine Lösung ist.

28. a) $x + 0{,}5x + 31 = x + x + 25{,}5 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x = 11}$

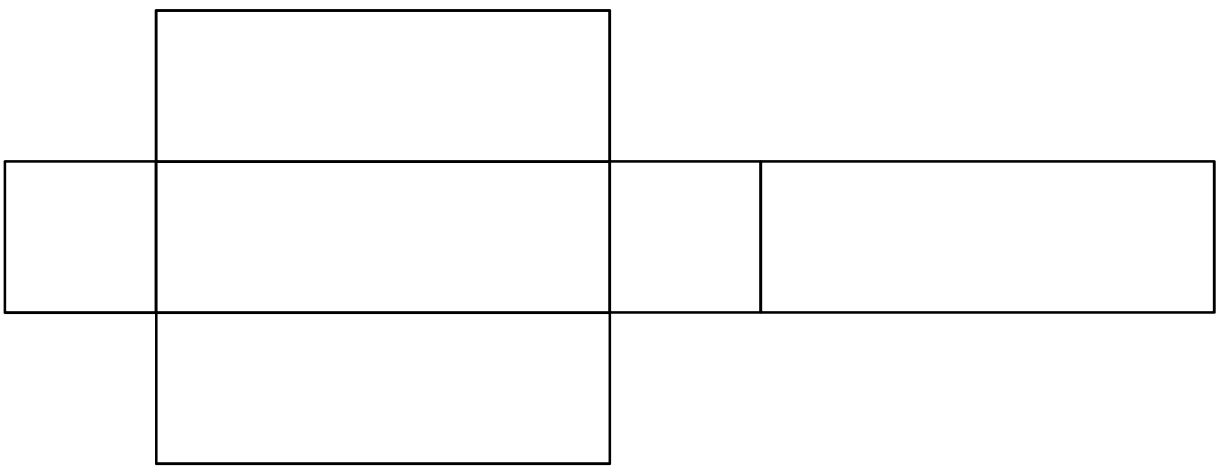
b) $a = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + 39 \;\rightarrow\; \boldsymbol{a = 117}$

c) $d^2 + 14 = 39 \;\rightarrow\; \boldsymbol{d = 5}$

29. $x \cdot x \cdot 3x = 24cm^3 \;\rightarrow\; x = 2cm.$

Der Quader ist also $6cm$ lang, $2cm$ breit und $2cm$ hoch.

$A = 2 \cdot (6cm \cdot 2cm + 6cm \cdot 2cm + 2cm \cdot 2cm) = \underline{\boldsymbol{56cm^2}}$

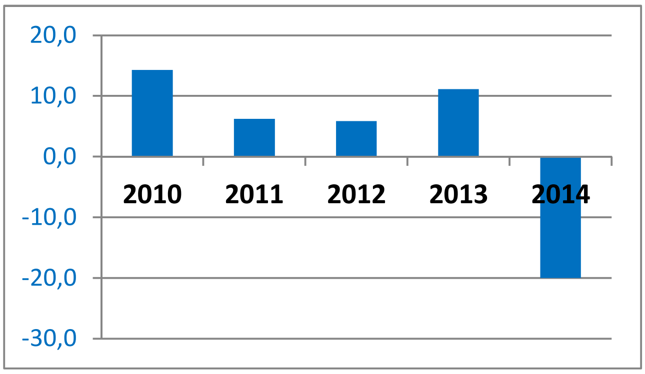


V. Daten, Diagramme und Prozentrechnung

30. a)

Jahr	2010	2011	2012	2013	2014
Absoluter Zuwachs	10	5	5	10	-20
Relativer Zuwachs	14,3%	6,3%	5,9%	11,1%	-20,0%

b)



31. Preis am Anfang: x €

Preis nach der Preissteigerung: $1{,}5x$ €

Preis nach der Preissenkung: $1{,}2x$ €

Senkung in %: $\frac{0{,}3x}{1{,}5x} = \frac{3}{15} = \underline{\mathbf{20\%}}$

32. a) Mittelwert: $51 : 6 = 8{,}5 > 8$, also muss die zweite Kasse besetzt werden.

b)

Woche	1	2	3	4	5	6
Abweichung	17,6%	-17,6%	52,3%	5,9%	-17,6%	-41,2%

33. Zinsertrag: $0{,}046 \cdot 20000€ \cdot 0{,}5 = 460€$

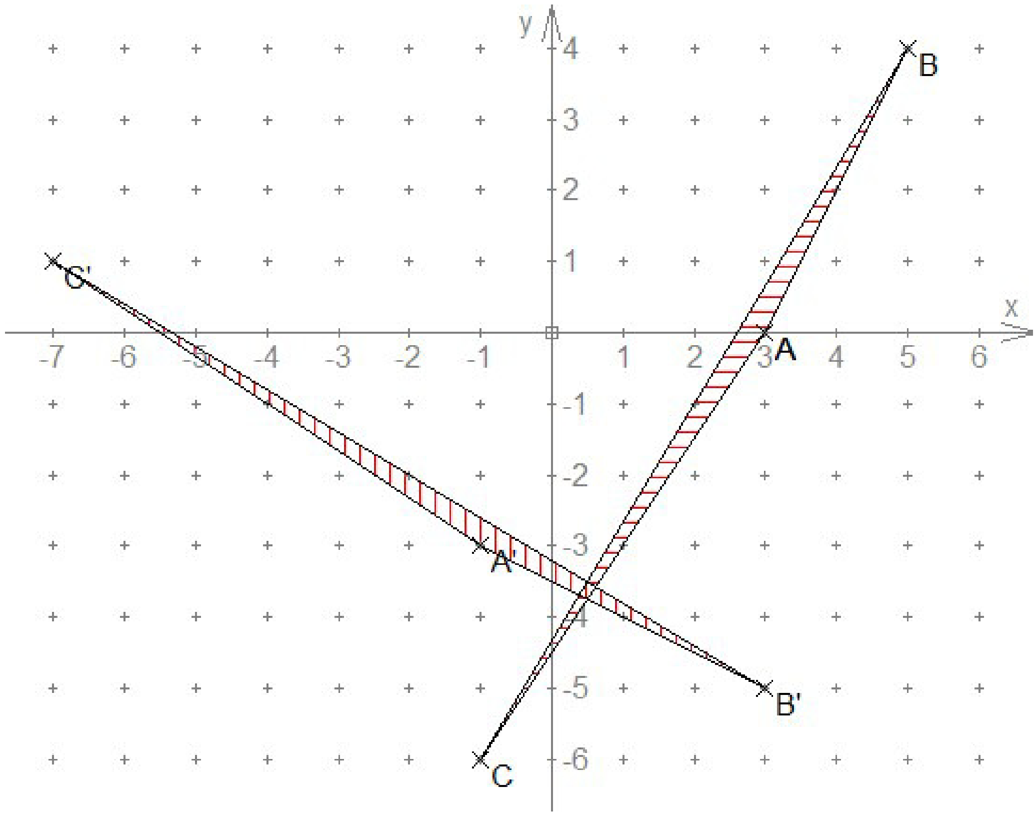
34. a) Preis im Januar: $1{,}12 \cdot 35000€ = 39200€$

Preis im August: $0{,}92 \cdot 39200€ = 36064€$

b) $\frac{1064}{35000} \approx 3\%$. Die Neuwagen waren im August ca. 3% teurer als im Dezember des Vorjahrs.

VI. Kongruenz und Dreieckskonstruktionen

35. $C'(-7|1)$



36.

ΔEBD		ΔFDB
$\overline{BD}$	$=$	$\overline{BD}$
$\overline{EB}$	$=$	$\overline{DF}$
$\sphericalangle ABD$	$=$	$\sphericalangle BDC$

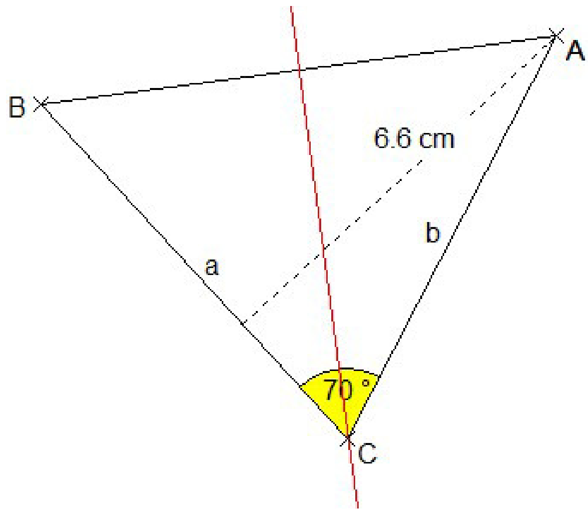
➔ Dreiecke sind kongruent wegen SWS-Satz

37. Kontrolle durch Messung: $\alpha \approx 55°$.

38. a) $wahr$ b) $wahr$ c) $wahr$ d) $falsch$

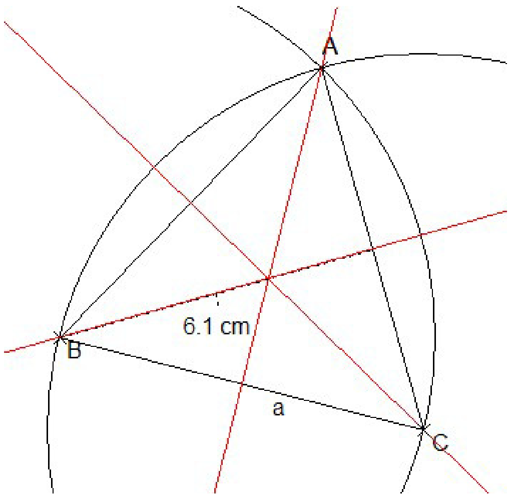
39. a) Zeichne die Strecke $[BC]$. Trage in C einen 70°-Winkel an. Trage am freien Schenkel 7cm an und erhalte A. Verbinde die Punkte A und B.

Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot 7cm \cdot 6{,}6cm = 23{,}1cm^2$



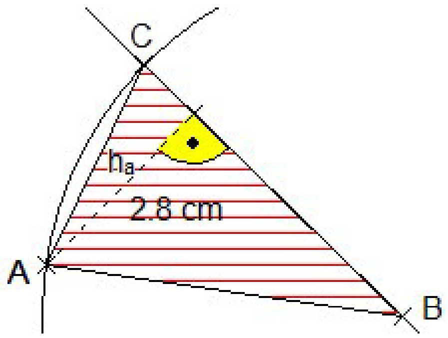
b) Zeichne die Strecke $a = [BC]$. Zeichne um B und C jeweils einen Kreis mit Radius $7cm$ und erhalte den Schnittpunkt C. Verbinde die Punkte.

Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot 7cm \cdot 6{,}1cm = 21{,}35cm^2$



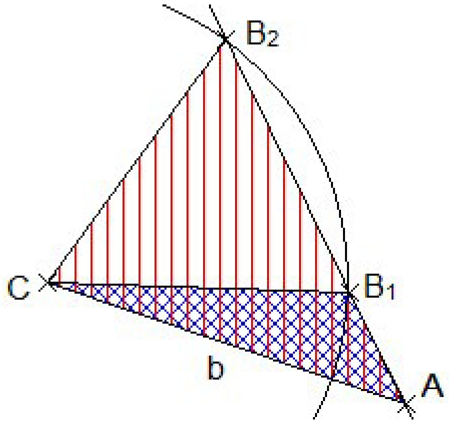
c) Zeichne die Strecke $c = [AB]$. Zeichne einen Kreis um B mit Radius $a = 4{,}8cm$. Trage an c einen 36°-Winkel an. Der Schnitt des freien Schenkels mit dem Kreis ist C.

Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot 4{,}8cm \cdot 2{,}8cm = 6{,}7cm^2$



40. a) Das Dreieck ist nicht konstruierbar, da sich kein Schnittpunkt ergibt.

b) Das Dreieck ist zwar konstruierbar, jedoch nicht eindeutig, da der gegebene Winkel nicht der größeren Seite gegenüberliegt.



41. Konstruierbar sind 360°, 180°, 90°, 60°, 0°.

90° mit Mittelsenkrechte auf Gerade, 60° mit Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks.

Daraus (nur jeweils Lösungsalternativen):

a) $\alpha = 60° + 60°$ oder $\alpha = 180° - 60°$ oder $\alpha = 90° + \frac{60°}{2}$

$\beta = 60° + \frac{60°}{4}$ oder $\beta = 45° + 30°$ oder $\beta = 90° - 15°$

b) **330°:** 60°-Winkel konstruieren und halbieren ergibt 30°. Damit hat man den 330°-Winkel.

22,5°: 90°-Winkel zweimal halbieren.

225°: 90°-Winkel konstruieren und halbieren und an einen gestreckten Winkel antragen.

42. Maßstab 1:25000, d.h.:

→ $1{,}5km = 150000cm \equiv 6cm$

→ $2km \equiv 8cm$

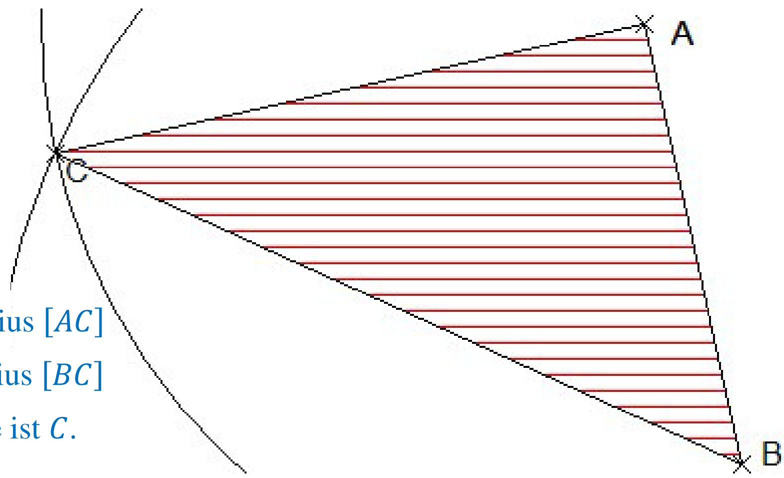
→ $2{,}5km \equiv 10cm$

Zeichne (z.B.) die Strecke $[AB]$.

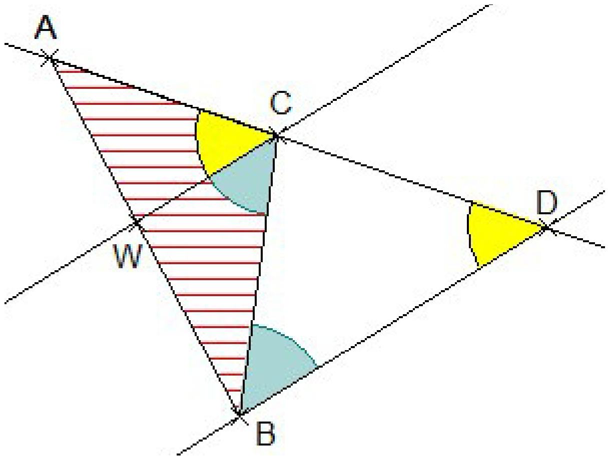
Zeichne einen Kreis um A mit Radius $[AC]$

Zeichne einen Kreis um B mit Radius $[BC]$

Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.



43. Skizze:



Wie in der Skizze rechts dargestellt gilt:

$\sphericalangle ACW = \sphericalangle ADB = \frac{\gamma}{2}$ (Stufenwinkel)

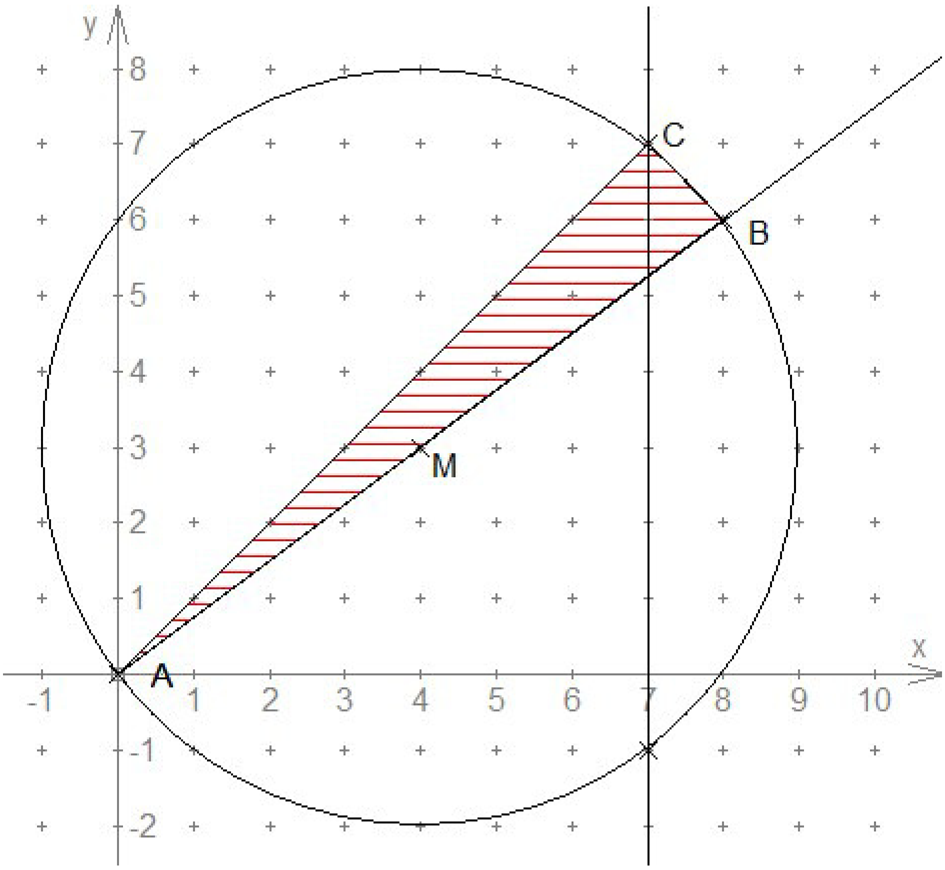
$\sphericalangle WCB = \sphericalangle DBC = \frac{\gamma}{2}$ (Wechselwinkel)

Im Dreieck BCD sind zwei Winkel gleich groß.

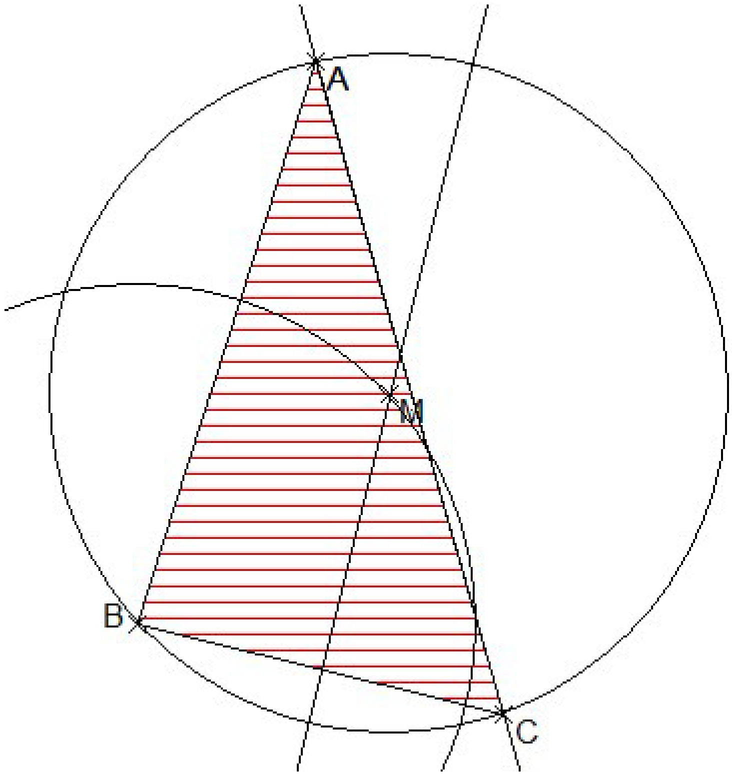
→ **Dreieck BCD ist gleichschenklig**.

44. Mit Winkelsumme im Dreieck gilt: $2 \cdot (\gamma + 12°) + \gamma = 180°$ → $\gamma = 52°$, $\alpha = \beta = 64°$

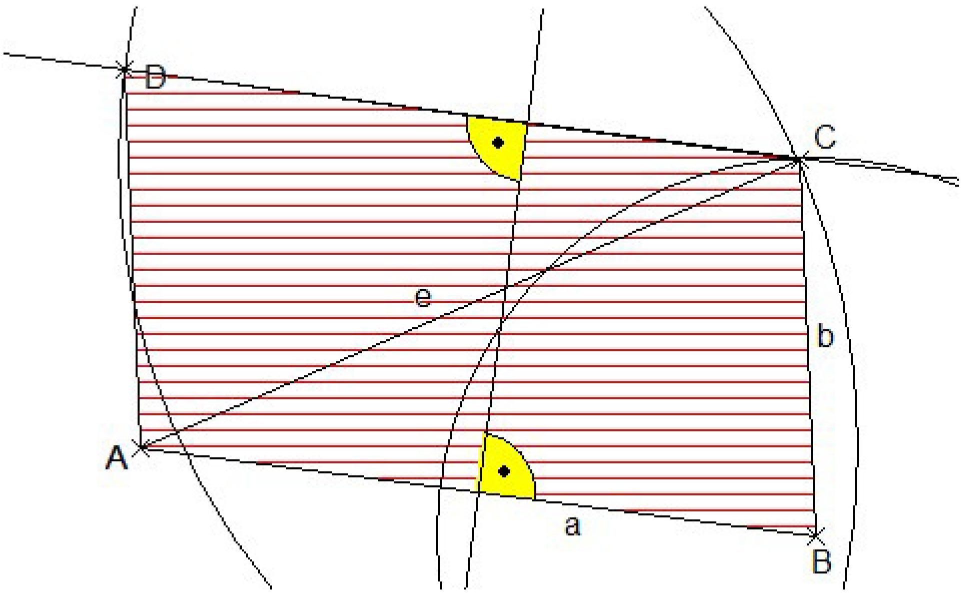
45. $[AB]$ ist Durchmesser eines Thaleskreises um M. Deshalb $B(8|6)$ und $C(7|7)$ Mit falschem Umlaufsinn gäbe es auch noch $C'(7|-1)$.



46. (ohne Planfigur). Idee: Ich zeichne die Strecke $[BC]$ an die ich den 60°-Winkel antrage. Auf dem freien Schenkel muss A liegen. Nun muss ich noch den Umkreismittelpunkt finden, um mit Hilfe des Umkreises dann A genau zu bestimmen. Dazu konstruiere ich die Mittelsenkrechte zu $[BC]$ und schneide sie mit einem Kreis um A mit Radius $4{,}5cm$.



47. Der Flächeninhalt beträgt etwa $44{,}3cm^2$.



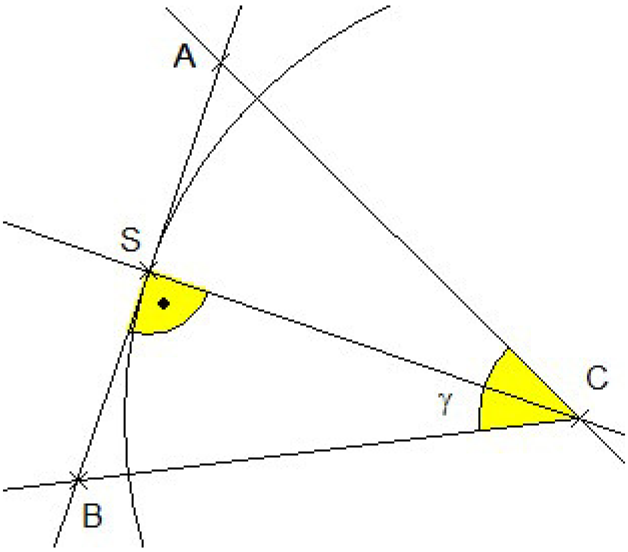
48. (Jeweils ohne Planfigur)

a) Zeichne einen Winkel von 52° mit Scheitel C und halbiere diesen.

Ziehe einen Kreis um C mit Radius $r = 6cm$ und erhalte S.

Errichte in S ein Lot auf die Winkelhalbierende.

Die beiden Schnittpunkte mit den Schenkeln von γ sind A und B.

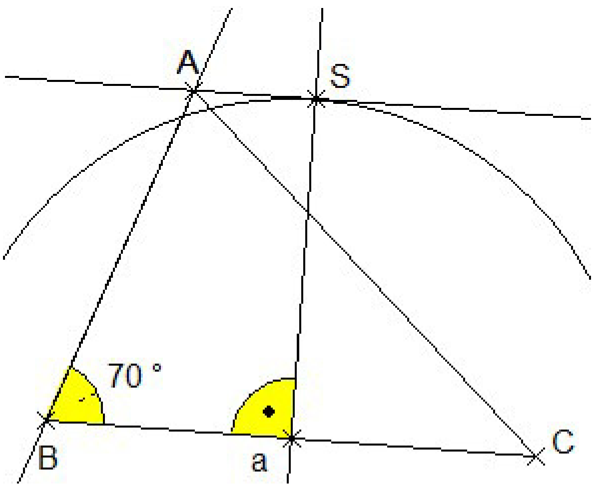


b) Zeichne die Strecke $[BC] = 6{,}5cm$.

Trage in B den Winkel $\beta = 70°$ an.

Zeichne/Konstruiere eine Parallele zu BC im Abstand $4{,}5cm$.

Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Parallelen ist A.



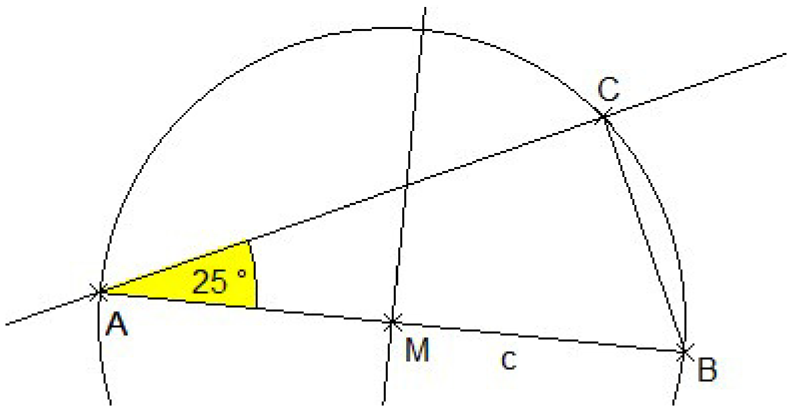
c) Zeichne die Strecke $[AB] = 7{,}8cm$.

Trage in A den Winkel $\alpha = 25°$ an.

Da $r = \frac{c}{2}$ liegt der Umkreismittelpunkt M auf c.

Zeichne einen Kreis um M mit Radius $r = 3{,}9cm$.

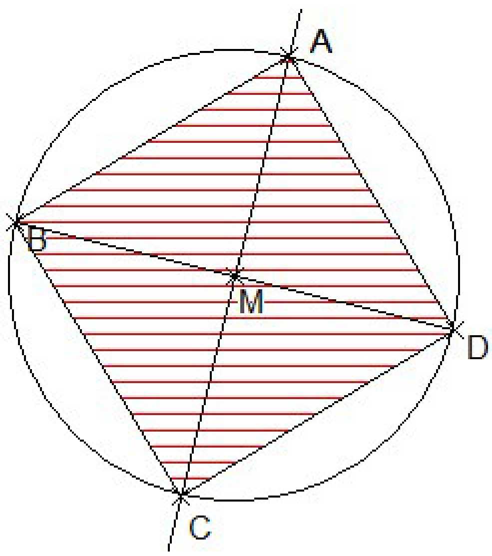
Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Kreislinie ist C.



49. (Jeweils ohne Planfigur.)

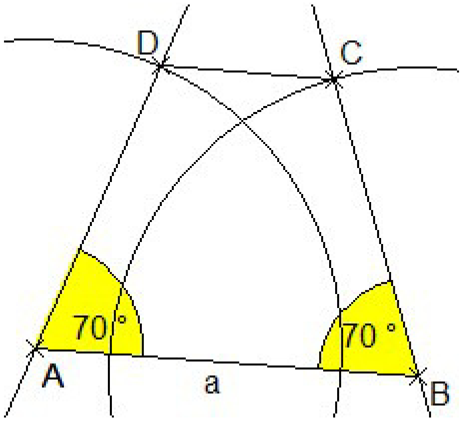
a) Da alle Seiten gleich lang sind muss das Viereck eine Raute sein. Da außerdem die Diagonalen gleich lang sind ist es ein Quadrat.

Also beginnt man mit einer Diagonalen der Länge $6cm$, konstruiert die Mittelsenkrechte, zieht einen Kreis um M mit Radius $3cm$ und hat alle vier Eckpunkte.



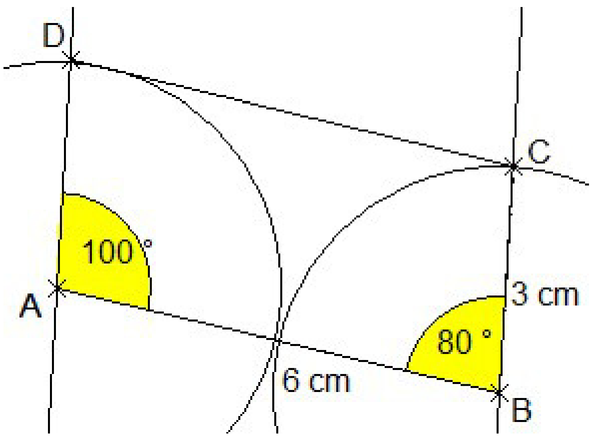
b) Da jeweils zwei benachbarte Winkel gleich groß sind, handelt es sich um ein gleichschenkliges bzw. achsensymmetrisches Trapez.

Also beginnt man mit der Seite $a = 5{,}1cm$ und trägt an beiden Endpunkten jeweils einen Winkel von $70°$ an. Anschließend zieht man um A und B jeweils einen Kreis mit Radius $r = 4{,}1cm$ und erhält C und D.



c) Da $a = c$ und $\alpha + \beta = 180°$, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Also beginnt man mit der Seite $a = 6cm$ und trägt an den Endpunkten A bzw. B die Winkel $\alpha = 100°$ bzw. $\beta = 80°$ an. Anschließend zieht man um A und B jeweils einen Kreis mit Radius $r = 3cm$ und erhält C und D.



50. a) $falsch$ b) $wahr$ c) $wahr$ d) $wahr$ e) $wahr$